

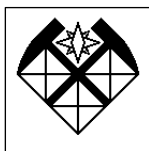
Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

Л.М.АЛЬПИН, Д.С.ДАЕВ, А.Д.КАРИНСКИЙ

# ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ

ВЫСШЕЕ  
ОБРАЗОВАНИЕ

**Часть V.**  
**Глава восьмая.**  
*Элементы теории*  
*упругости.*  
**Глава девятая.**  
*Распространение*  
*упругих*  
*колебаний.*



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени Серго Орджоникидзе  
**(МГРИ)**

---



**Л. М. АЛЬПИН, Д. С. ДАЕВ, А. Д. КАРИНСКИЙ**

# **ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РАЗВЕДОЧНОЙ ГЕОФИЗИКЕ**

*Было допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»*

## **Часть V.**

**Глава восьмая. Элементы теории упругости.  
Глава девятая. Распространение упругих колебаний.**

УДК 550.83.01(0.75)

**Л. М. Альпин**, **Д. С. Даев**, А. Д. Каринский.

## Теория полей, применяемых в разведочной геофизике.

Учебник для вузов. – М.: Недра, 1985. – 407 с.

Изложена теория полей: гравитационного; электростатического и магнитостатического в вакууме и в поляризующейся (намагничивающейся) среде; стационарных электрического и магнитного; переменного электромагнитного; рассмотрены элементы теории упругости; распространение электромагнитных и упругих колебаний в среде; способы расчёта полей и их зависимости от среды.

Для студентов геофизических специальностей геологоразведочных вузов и факультетов.

Рецензенты:

1. Кафедра геофизики МГУ.
2. Д-р техн. наук *Б. С. Светов (ИЗМИРАН)*.

Учебник "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике", отражавший (в то время) взгляды научной школы бывшего геофизического факультета МГРИ, был выпущен издательством "Недра" в 1985 году.

По мнению одного из авторов подготовка в настоящее время электронной версии Учебника даёт возможность дополнить книгу несколькими представляющими интерес, возможно не только для студентов, разделами и значительно увеличить число иллюстраций. Есть надежда, что удастся подготовить в виде отдельных pdf-файлов следующие пять частей электронной версии Учебника. Часть I: "Введение. Поле"; часть II: "Статические поля в вакууме и в присутствии среды"; часть III: "Стационарные электрическое и магнитное поля"; часть IV: "Переменное электромагнитное поле"; часть V: "Элементы теории упругости и теории распространения упругих колебаний".

В этом разделе электронной версии Учебника представлена **часть V.**

**Глава восьмая. Элементы теории упругости.**

**Глава девятая. Распространение упругих колебаний.**

2021, 104 с.

Иллюстраций 33, список литературы 34 названия.

http-адреса **части I:**

<https://elibrary.ru/item.asp?id=41710031>

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol1\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf)

В части I – разделы: "Предисловие", "Введение", глава первая "Поле".

http-адреса **части II:**

<https://elibrary.ru/item.asp?id=42771398>

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol2\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf)

В части II – разделы: глава вторая "Статическое поле в вакууме", глава третья "Статическое поле в присутствии среды".

http-адреса **части III:**

<https://elibrary.ru/item.asp?id=42782333>

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol3\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol3_2020.pdf)

В части III – разделы: глава четвёртая "Стационарное электрическое поле", глава пятая "Магнитное поле постоянного тока".

http-адреса **части IV:**

<https://elibrary.ru/item.asp?id=43803479>

[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol4\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol4_2020.pdf)

В части IV – разделы: глава шестая "Переменное электромагнитное поле", глава седьмая "Прямая задача теории переменного электромагнитного поля".

Электронная версия части V Учебника подготовлена А. Д. Каринским  
Москва, 2021 г.

## Оглавление

Оглавление .....	2
Список обозначений к главам восьмой, девятой.....	4
Глава восьмая. Элементы теории упругости.....	6
§ 1. НАПРЯЖЕНИЯ .....	7
I. Виды напряжений .....	7
II. Связь между напряжениями, действующими на различно ориентированных площадках в одной и той же точке .....	9
III. Тензор напряжений .....	11
IV. Главные напряжения .....	13
V. Дифференциальные уравнения равновесия.....	15
§ 2. ДЕФОРМАЦИИ.....	17
I. Поле вектора смещения.....	18
II. Тензор деформации .....	19
III. Главные удлинения .....	23
§ 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ .....	25
I. Закон Гука.....	25
II. Закон Гука для изотропного тела. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона.....	26
III. Выражение напряжений через деформации.....	30
IV. Упругий потенциал.....	32
Глава девятая. Распространение упругих колебаний.....	34
§ 1. УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ .....	34
I. Уравнение передачи колебаний в изотропной упругой среде .....	34
II. Волновые уравнения. Продольные и поперечные волны .....	35
III. Начальные и граничные условия.....	38
§ 2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ .....	40
I. Сферические продольные волны .....	40
II. Сферические поперечные волны .....	48
III. Плоские однородные и неоднородные волны.....	52

	3
IV. Одновременное возбуждение и распространение продольных и поперечных волн. Сосредоточенный источник .....	56
§ 3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ.....	62
I. Общее решение волнового уравнения.....	62
II. Формулы Кирхгофа и Пуассона.....	63
III. Зоны Френеля. Область, существенная при распространении волн ...	67
§ 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА.....	74
I. Граничные условия для полей смещений $u_P$ , $u_S$ .....	74
II. Нормальное падение плоской гармонической продольной волны на плоскую границу .....	76
III. Нормальное падение плоской гармонической линейно поляризованной поперечной волны на плоскую границу .....	78
IV. Отражение и прохождение плоской гармонической продольной волны, падающей на плоскую поверхность раздела .....	79
V. Поверхностные волны Релея.....	86
Приложение.....	92
ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ СГС .....	92
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	94
Список литературы.....	102
Сведения об авторах .....	104

## Список обозначений к главам восьмой, девятой

$\mathbf{1}_l, \mathbf{1}_x, \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_R, \dots$  - безразмерные единичные векторы (орты) с абсолютной величиной, равной единице по направлениям  $l, X, l_1, l_R, \dots$ ;

$\mathbf{a}$ , м/с<sup>2</sup>- ускорение;

$A$ , Дж- работа;

$A_P, A_S$ - коэффициенты отражения;

$B_P, B_S$ - коэффициенты прохождения;

$C, c$ - константы;

$dl$ , м- бесконечно-малый отрезок (элемент) линии  $l$ ;

$dm$ , кг- бесконечно-малая масса;

$d\mathbf{P}_n$ , Н- сила на элементарной площадке  $dS$  с нормалью  $n$ ;

$dS$ , м<sup>2</sup>- бесконечно-малая площадка или элемент поверхности  $S$ ;

$d\mathbf{Q}$ , Н- сила, действующая на бесконечно-малую массу  $dm$ ;

$dV$ , м<sup>3</sup>- бесконечно малый объём или элемент области  $V$  пространства;

$dx, dy, dz$ - бесконечно малые отрезки параллельные осям  $X, Y, Z$ ;

$E$ , Н/м<sup>2</sup>- модуль Юнга;

$\mathcal{E}$ - напряжение векторного поля;

$f$ - функция, либо  $f=\omega/2\pi$ - частота (в Гц);

$\mathbf{F}$ , Н- сила, либо  $\mathbf{F}=d\mathbf{Q}/dm$ , Н/кг- сила, отнесённая к единице массы ("массовая сила");

$\mathcal{F}$ , Н- сосредоточенная сила;

$h$ - коэффициент Ламэ;

$i=\sqrt{-1}$  - мнимая единица;

$I_1, I_2, I_3$ - инварианты деформированного состояния;

$k$ , 1/м- волновое число;

$K$ , Н/м<sup>2</sup>- модуль всестороннего сжатия;

$l$ - линия, длина;

$l_x, l_R, \dots$ - координатные линии;

$n$ - нормаль к поверхности  $S$ ;

$\mathbf{n}=\mathbf{1}_n$ - безразмерный единичный вектор по направлению нормали  $n$ ;

$O$ - начало координат;

$p$ , Н/м<sup>2</sup>- давление;

$\mathbf{p}$ , Н/м<sup>2</sup>- вектор напряжения с абсолютной величиной  $p$ ;

$\mathbf{p}_n=\mathbf{n}\cdot p_n$ ,  $\mathbf{p}_x=\mathbf{1}_x\cdot p_x$ ,  $\mathbf{p}_y=\mathbf{1}_y\cdot p_y$  и  $\mathbf{p}_z=\mathbf{1}_z\cdot p_z$  Н/м<sup>2</sup> - (упругие) напряжения на элементарных площадках  $dS, dS_{yz}, dS_{xz}, dS_{xy}$  с нормальями  $n, \mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ ;

$r$ - цилиндрическая координата, м;

$R$ - сферическая координата, м;

$S$ - поверхность, площадь, м<sup>2</sup>;

$S[V]$ - замкнутая поверхность, ограничивающая область пространства  $V$ ;

$t$ , с- время;

$T$ , с- период колебаний;

$\mathbf{u}$ , м- поле смещений с декартовыми скалярными компонентами  $u, v, w$ ;

$\mathbf{v}_P$ , м/с- скорость продольных упругих волн с абсолютной величиной  $v_P$ ;

$\mathbf{v}_R$ , м/с- скорость волны Релея с абсолютной величиной  $v_R$ ;  
 $\mathbf{v}_S$ , м/с- скорость поперечных упругих волн с абсолютной величиной  $v_S$ ;  
 $V$ - область пространства;  
 $x, y, z$ , м- декартовы координаты;  
 $X, Y, Z$ - оси декартовых координат;  
 $Z_P, Z_S$ , кг/(м<sup>2</sup>·с)- акустическая жёсткость (волновое сопротивление);  
 $\alpha_0$  (альфа)- угол падения;  
 $\alpha_P, \alpha_S$ - углы отражения для продольной и поперечной упругих волн;  
 $\beta_P, \beta_S$  (бета)- углы прохождения для продольной и поперечной упругих волн;  
 $\gamma$  (гамма)- деформация сдвига;  
 $\varepsilon$  (эпсилон)- деформация сжатия - растяжения (относительное удлинение или сжатие);  
 $\eta$  (эта)- скорость смещения, м/с;  
 $\theta$  (тета)- дилатация (относительное изменение объёма), либо сферическая координата;  
 $\lambda$ , Н/м<sup>2</sup> (лямбда)- одна из упругих постоянных Ламэ;  
 $\Lambda$ , м (лямбда прописная)- длина волны;  
 $\mu$ , Н/м<sup>2</sup> (мю)- одна из упругих постоянных Ламэ- модуль сдвига;  
 $\nu$  (ню)- коэффициент Пуассона;  
 $\xi$  (кси)- координата;  
 $\pi$  (пи) $\approx 3.1415926535897932384626433832795028841971694\dots$ ;  
 $\rho$ , кг/м<sup>3</sup> (ро)- плотность;  
 $\sigma$ , Н/м<sup>2</sup> (сигма)- нормальное упругое напряжение;  
 $\sigma_n, \sigma_x=p_{xx}, \sigma_y=p_{yy}, \sigma_z=p_{zz}$ , Н/м<sup>2</sup> - нормальные напряжения на площадках  $dS$  с нормальными  $n$  по направлениям осей  $X, Y, Z$ ;  
 $\tau$ , Н/м<sup>2</sup> (тау)- касательное упругое напряжение;  
 $\tau_{xy}=p_{xy}, \tau_{yx}=p_{yx}, \tau_{yz}=p_{yz}, \dots$ , Н/м<sup>2</sup> - тангенциальные (касательные) напряжения на координатных площадках  $dS_{xy}, dS_{yx}, dS_{yz}, \dots$  ;  
 $\varphi$ , м<sup>2</sup> (фи)- скалярный потенциал поля смещений  $\mathbf{u}$ , либо сферическая (азимутальная) координата;  
 $\Phi$  (фи прописная)- скалярный потенциал внешних сил;  
 $\Psi$ , м<sup>2</sup> (пси)- векторный потенциал поля смещений  $\mathbf{u}$ ;  
 $\Psi$  (пси прописная)- векторный потенциал внешних сил;  
 $\omega=2\pi f$ , 1/с (омега)- круговая частота;  
 $\boldsymbol{\omega}$  (омега)- вектор вращения;  
 $\Omega$  (омега прописная)- малая область пространства;  
 $\nabla$ - оператор Гамильтона (оператор набла);  
 $\nabla^2=\Delta$ - оператор Лапласа;  
 $\checkmark, \checkmark, \checkmark, \checkmark, \checkmark$   
 $p, \dots; \mathbf{u}, \varphi, \dots; u, v, \dots$ ; - гармонически меняющиеся величины  $p, \dots$ ; поля  $\mathbf{u}, \varphi, \dots$ ; скалярные компоненты  $u, v, \dots$  векторных полей в комплексной форме.

## Глава восьмая. Элементы теории упругости

В этой и следующей главах иногда будем пользоваться обозначениями, отличными от тех, которые применяли в предыдущих главах, но традиционными для теории упругости и теории распространения упругих колебаний.

Сейсмический метод разведки основан на изучении особенностей распространения механических колебаний в горных породах. Эти колебания вызывают внешние силы – ударное воздействие взрыва или специальных устройств. Под действием приложенных сил в горной породе происходит изменение взаимного положения частиц породы – деформация среды. Это приводит к возникновению внутренних сил – (упругих) напряжений, которыми уравнивается действие внешних сил. Если после окончания действия внешних сил тело мгновенно восстанавливает своё прежнее состояние и форму и напряжения исчезают, его называют абсолютно или идеально упругим. Возникающие изменения размеров и формы называют упругими деформациями. Если после прекращения воздействия внешних сил тело восстанавливает старую форму постепенно, то его называют пластическим или неабсолютно упругим.

В горных породах под действием ударных нагрузок происходят как упругие, так и неупругие деформации. Преобладание тех или иных определяет ряд причин, из которых решающими являются величина действующей силы и свойства самой породы. Если исключить из рассмотрения некоторые образования, например сухой песок, и рассматривать область, где силы, воздействующие на породы, малы по величине, то горные породы ведут себя как упругое тело. Поэтому возникающие в породах колебания можно рассматривать как колебания в упругой среде. Отчетливое понимание закономерностей распространения таких колебаний возможно лишь на основе знакомства с основными положениями теории упругости.

В теории упругости исходят из нескольких основных допущений и положений. Принимается, в частности, что: 1) материал, слагающий упругое тело, является сплошным, заполняющим всё занимаемое пространство без разрывов, т. е. игнорируется молекулярное и атомистическое строение вещества и реализуется макроскопический подход к среде; 2) материал является идеально упругим, в нём не происходит поглощения энергии при нагрузке или разгрузке; 3) существует пропорциональность между деформацией и напряжением. Обычно ограничиваются рассмотрением однородной и изотропной среды.

Рассмотрение распространения сейсмических колебаний в горных породах с позиций теории упругости объясняется не только сходством горных пород с упругим телом при малых воздействиях, но и сложностью и недостаточной разработанностью вопроса о распространении таких колебаний в реальных средах. Некоторые физические явления, отличающие распространения сейсмических колебаний в горных породах от распространения в идеально упругой среде, например, наличие поглощения, могут быть в дальнейшем учтены путем введения в уравнения соответствующих поправочных членов и коэффициентов.



## § 1. НАПРЯЖЕНИЯ

### I. Виды напряжений

Рассмотрим тело, подвергающееся воздействию внешних сил и находящееся в равновесии. Внешние силы могут быть приложены к поверхности тела – в этом случае говорят о поверхностных силах, или к каждому элементу объёма тела – объёмные силы. Примером первых может служить давление газов или твёрдых тел, соприкасающихся с телом, примером вторых – сила тяжести, центробежная сила.

Действие внешних сил для тела, находящегося в равновесии, уравнивается силами внутреннего притяжения (отталкивания). Это порождает в теле внутреннее напряжённое состояние, представляющее собой реакцию тела на действующие силы.

Чтобы оценить напряжённое состояние, мысленно разрежем тело произвольной формы на две части  $A$  и  $B$  по поверхности  $S$  (рис. 8.1,  $a$ ). Удалим часть  $A$  вместе с приложенными к ней силами. Для того чтобы часть  $B$  осталась

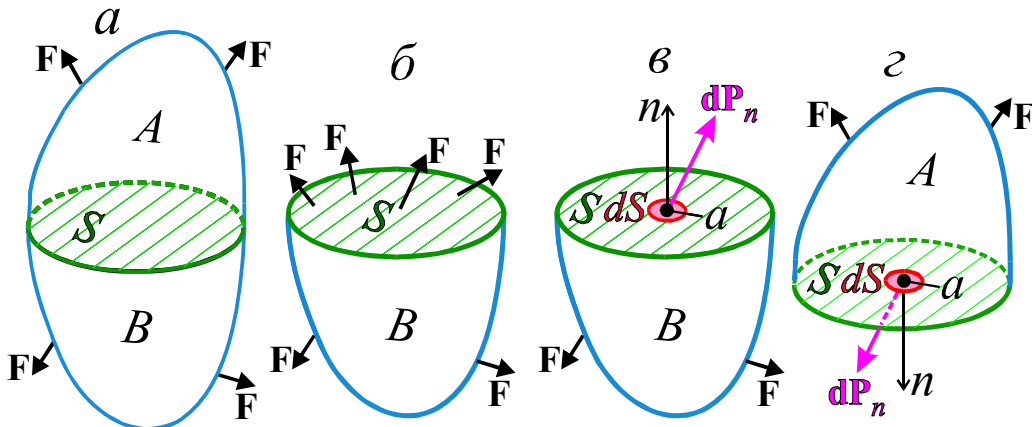


Рис. 8.1.

Вектор упругого напряжения  $\mathbf{p}_n = d\mathbf{P}_n/dS$

в прежнем состоянии, надо задать на поверхности  $S$  систему поверхностных сил (рис. 8.1,  $б$ ). Эти силы заменят действие части  $A$  на часть  $B$ . Для тела в целом данные силы являются внутренними. Они и определяют то напряжённое состояние, которое существовало в соответствующих точках тела до его рассечения. Под действием этих внутренних сил и приложенных внешних сил каждая часть тела находится в равновесии. Компенсирующие поверхностные силы (на поверхности  $S$ ), отнесённые к площадкам, на которые они действуют, и есть напряжения. В общем случае они меняются по величине и направлению при переходе от точки к точке тела.

Возьмём на поверхности  $S$  элементарную площадку  $dS$  с нормалью  $n$ . В точке  $a$  на площадке действует сила  $d\mathbf{P}_n$  (рис. 8.1,  $в$ ). Отношение

$$\mathbf{p}_n = d\mathbf{P}_n/dS \quad (8.1)$$

называют вектором напряжения на площадке  $dS$ . Вектор  $d\mathbf{P}_n$  может быть ориентирован по-разному относительно площадки. Таким образом, индекс  $n$  у  $d\mathbf{P}_n$  и вектора напряжения  $\mathbf{p}_n$  указывает только на ориентировку площадки (с

нормалью  $n$ ), на которой действует данный вектор, но не на ориентировку последнего. Следует подчеркнуть, что вектор  $\mathbf{p}_n$ , как и сила  $d\mathbf{P}_n$  зависит не только от положения центра  $a$  элементарной площадки в упругом теле, но и от ориентировки площадки в пространстве. Если мы рассечём тело другой поверхностью  $S_1$ , тоже проходящей через точку  $a$ , то система напряжений, компенсирующих удаление новой части, будет другая и соответствующая сила в точке  $a$  будет  $d\mathbf{P}_{1n}$ , а не  $d\mathbf{P}_n$ . Будет иным и напряжение:  $\mathbf{p}_{1n}$  вместо  $\mathbf{p}_n$ .

Поэтому полная характеристика напряжённого состояния тела в данной точке не может быть описана с помощью вектора. Для описания поля упругих напряжений требуется более сложное понятие, чем вектор. Вектор  $\mathbf{p}_n$  можно разложить на три составляющие (компоненты) по трём координатным направлениям. В декартовой системе координат скалярные компоненты вектора  $\mathbf{p}_n$  обозначим  $p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}$ . Первый индекс указывает направление нормали  $n$  к площадке, на которой "действует" напряжение (вектор)  $\mathbf{p}_n$ , а второй показывает то, по какой декартовой оси взята эта составляющая.

В теории упругости обычно рассматривают напряжения, действующие на площадках, ортогональных координатным осям  $X, Y, Z$ . Вырежем мысленно малый параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 8.2, а).

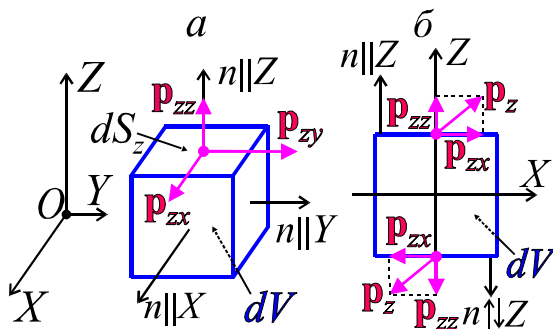


Рис. 8.2.

Упругие напряжения и их составляющие на площадках, ортогональных координатным осям

действуют разные векторы напряжений –  $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y$  и  $\mathbf{p}_z$ . Каждый из этих векторов можно разложить на три декартовы компоненты:

Для вектора  $\mathbf{p}_x$ , действующего на площадке, ортогональной оси  $X$ , будем иметь составляющие  $\mathbf{p}_{xx} = \mathbf{1}_x \cdot p_{xx}$ ,  $\mathbf{p}_{xy} = \mathbf{1}_y \cdot p_{xy}$ ,  $\mathbf{p}_{xz} = \mathbf{1}_z \cdot p_{xz}$ , для  $\mathbf{p}_y$  – соответственно  $\mathbf{p}_{yx} = \mathbf{1}_x \cdot p_{yx}$ ,  $\mathbf{p}_{yy} = \mathbf{1}_y \cdot p_{yy}$ ,  $\mathbf{p}_{yz} = \mathbf{1}_z \cdot p_{yz}$ , для  $\mathbf{p}_z$  – соответственно  $\mathbf{p}_{zx} = \mathbf{1}_x \cdot p_{zx}$ ,  $\mathbf{p}_{zy} = \mathbf{1}_y \cdot p_{zy}$ ,  $\mathbf{p}_{zz} = \mathbf{1}_z \cdot p_{zz}$ .

Составляющие (скалярные

компоненты)  $p_{xx}, p_{yy}$  и  $p_{zz}$  – нормальные напряжения. Они ортогональны соответствующим площадкам. Их обычно обозначают так:

$$p_{xx} = \sigma_x, \quad p_{yy} = \sigma_y, \quad p_{zz} = \sigma_z. \quad (8.2)$$

Остальные напряжения ( $p_{xy}, p_{xz}, \dots$ ) лежат в плоскостях соответствующих площадок. Это касательные или тангенциальные напряжения. Их в дальнейшем будем обозначать символом  $\tau$ :

$$p_{xy} = \tau_{xy}, \quad p_{xz} = \tau_{xz}, \quad p_{yx} = \tau_{yx}, \quad p_{yz} = \tau_{yz}, \quad p_{zx} = \tau_{zx}, \quad p_{zy} = \tau_{zy}. \quad (8.3)$$

Знаки составляющих векторов напряжения зависят от выбора направления координатных осей. Если внешняя нормаль к координатной площадке совпадает с направлением соответствующей координатной оси, т. е.  $n \parallel X$ ,  $n \parallel Y$  или  $n \parallel Z$ , (рис. 8.2), то положительные составляющие (векторные компоненты) вектора напряжения соответствуют направлениям координатных осей. Если внешняя нормаль к площадке имеет направление, противоположное

координатной оси ( $n \uparrow X$ ,  $n \uparrow Y$  или  $n \uparrow Z$ ), то положительные составляющие вектора напряжения имеют направления, противоположные координатным осям.

Положительным нормальным напряжениям отвечает *растяжение*, а отрицательным – *сжатие*.

## II. Связь между напряжениями, действующими на различно ориентированных площадках в одной и той же точке

Вырежем из тела бесконечно малый четырёхгранник с рёбрами  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ , у которого грани  $dS_{yz}$ ,  $dS_{xz}$  и  $dS_{xy}$  ортогональны к координатным осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , соответственно, а четвёртая грань  $dS$  – наклонная, с нормалью  $n$  (рис. 8.3). Направляющие косинусы  $\cos(n, \mathbf{1}_x)$ ,  $\cos(n, \mathbf{1}_y)$ ,  $\cos(n, \mathbf{1}_z)$  определяют ориентировку нормали в пространстве.

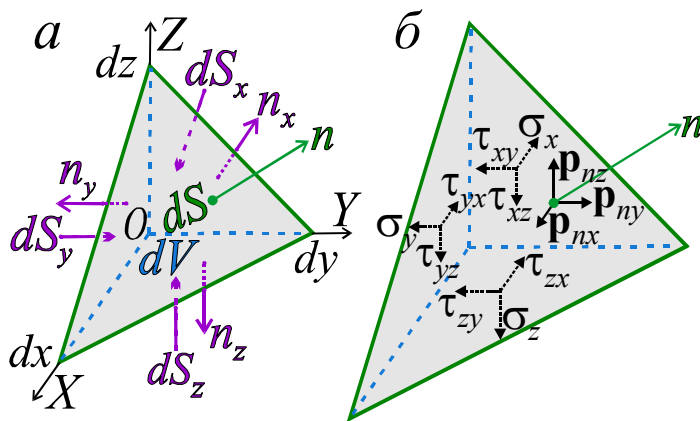


Рис. 8.3.

Определение составляющих напряжения на произвольно ориентированной наклонной площадке  $dS$

Выразим составляющие напряжения  $\mathbf{p}_n$  действующего на произвольно ориентированной наклонной площадке  $dS$ , через напряжения на гранях  $dS_{yz}$ ,  $dS_{xz}$ ,  $dS_{xy}$ . Если это удастся, то можно утверждать, что напряжённое состояние в данной точке полностью характеризуется векторами  $\mathbf{p}_x$ ,  $\mathbf{p}_y$  и  $\mathbf{p}_z$  или их составляющими.

Составим уравнения равновесия четырёхгранника. Очевидно, что если четырёхгранник не движется поступательно и не вращается, т. е. находится в равновесии, то геометрическая сумма приложенных к нему сил должна равняться нулю. В число этих сил входят поверхностные силы, действующие на каждую грань, и объёмная сила. Объёмная сила, пропорциональная объёму четырёхгранника  $dV$  ( $dV=(dx \cdot dy \cdot dz)/6$ ), является величиной третьего порядка малости относительно  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ . Поверхностная сила, действующая на каждой грани, равна произведению напряжения на площадь грани и является величиной второго порядка малости относительно  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Например,  $dp_x=p_x \cdot dS_{yz}=p_x \cdot (1/2) \cdot dy \cdot dz$ . Поэтому при составлении уравнения равновесия объёмной силой можно пренебречь по сравнению с поверхностными силами и уравнение равновесия можем представить в виде

$$\mathbf{p}_n \cdot dS = \mathbf{p}_x \cdot dS_{yz} + \mathbf{p}_y \cdot dS_{xz} + \mathbf{p}_z \cdot dS_{xy}. \quad (8.4)$$

Ввиду малости граней  $dS$  можем полагать, что напряжение в пределах каждой грани одинаково.

Уравнение (8.4) для векторов можно, заменить тремя уравнениями для скалярных компонент векторов по направлениям осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . При записи этих

уравнений учтём, что площади трёх граней четырёхгранника, ортогональных координатным осям, связаны с площадью наклонной грани  $dS$  равенствами:

$$dS_{yz}=dS \cos(n, \mathbf{1}_x), \quad dS_{xz}=dS \cdot \cos(n, \mathbf{1}_y), \quad dS_{xy}=dS \cdot \cos(n, \mathbf{1}_z).$$

Поэтому, например, уравнение равновесия для проекции на ось  $X$  сил, действующих на четырёхгранник, имеет вид:

$$p_{nx} \cdot dS = \sigma_x \cdot dS \cdot \cos(n, \mathbf{1}_x) + \tau_{yx} \cdot dS \cdot \cos(n, \mathbf{1}_y) + \tau_{zx} \cdot dS \cdot \cos(n, \mathbf{1}_z). \quad (8.5)$$

Аналогичные уравнения имеем для составляющих сил по осям  $Y$  и  $Z$ .

Сокращая в левых и правых частях уравнений множитель  $dS$ , получаем:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cdot \cos(n, \mathbf{1}_x) + \tau_{yx} \cdot \cos(n, \mathbf{1}_y) + \tau_{zx} \cdot \cos(n, \mathbf{1}_z), \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \cdot \cos(n, \mathbf{1}_x) + \sigma_y \cdot \cos(n, \mathbf{1}_y) + \tau_{zy} \cdot \cos(n, \mathbf{1}_z), \\ p_{nz} &= \tau_{xz} \cdot \cos(n, \mathbf{1}_x) + \tau_{yz} \cdot \cos(n, \mathbf{1}_y) + \sigma_z \cdot \cos(n, \mathbf{1}_z). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Эти уравнения – *формулы Коши*. Из них следует, что составляющие вектора напряжения, действующего на любой площадке  $dS$ , могут быть выражены через составляющие векторов напряжений, действующих на трёх площадках, ортогональных координатным осям. Иначе говоря, напряжённое состояние в каждой точке полностью определяют три вектора:  $\mathbf{p}_x$ ,  $\mathbf{p}_y$  и  $\mathbf{p}_z$ .

Условия равновесия требуют отсутствия не только поступательного движения, но и вращения тела. Составим три других уравнения равновесия четырёхгранника – уравнения моментов (вращения). Удобно взять моменты относительно прямых, проходящих через центр тяжести  $C$  наклонной грани четырёхгранника и параллельных координатным осям. Расстояния точки  $C$  от трёх граней четырёхгранника равны соответственно  $(1/3) \cdot dx$ ,  $(1/3) \cdot dy$  и  $(1/3) \cdot dz$ . Таким образом, проекции точки  $C$  на каждую из граней совпадают с их центрами тяжести. На **рис. 8.4, а** изображена одна из прямых, проходящих через точку  $C$  и параллельных координатным осям – прямая  $Y'$ , параллельная оси  $Y$ . Из двенадцати составляющих сил, действующих на все грани четырёхгранника десять либо пересекают прямую  $Y'$ , либо параллельны ей. Лишь две касательные силы, соответствующие напряжениям  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{zx}$  будут влиять на вращающий момент. Уравнение моментов относительно прямой  $Y'$ :

$$\tau_{xz} \cdot \frac{1}{2} dz dy \cdot \frac{dx}{3} - \tau_{zx} \cdot \frac{1}{2} dx dy \cdot \frac{dz}{3} = 0. \quad (8.7)$$

Аналогичные равенства получаем для моментов вращения относительно прямых, параллельных осям  $X$  и  $Z$ . В результате имеем

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (8.8)$$

Эти равенства выражают закон взаимности касательных напряжений.

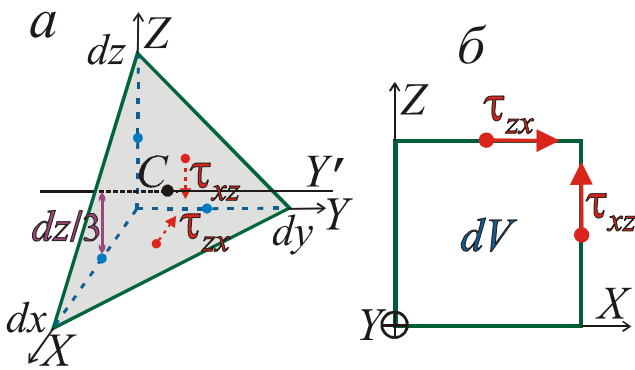


Рис. 8.4.

Составление уравнений моментов

Таким образом, на основании выражений (8.6) и (8.8) можно утверждать, что напряжённое состояние в данной точке полностью определяют шесть величин:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{zy}$ , которые являются компонентами векторов напряжений  $\mathbf{p}_x$ ,  $\mathbf{p}_y$  и  $\mathbf{p}_z$ , действующих на трёх площадках, ортогональных координатным осям.

### III. Тензор напряжений

Говорят, что напряжённое состояние в данной точке тела характеризует тензор напряжений.

О тензорных величинах уже было сказано в разделе VI § 1 и в разделе VI § 8 главы четвёртой. Там на примере удельной электропроводности было показано, что для характеристики параметров анизотропных сред служат тензорные величины.

Поясним смысл такого утверждения. Для этого рассмотрим, как в некоторой точке преобразуются составляющие векторов напряжений при переходе от системы координат  $x, y, z$  к системе  $x', y', z'$ , оси которой  $X', Y', Z'$  повернуты относительно осей  $X, Y, Z$  на некоторый угол. Иначе, говоря, выразим составляющие векторов напряжений в новой системе координат через составляющие в старой системе.

Возьмём бесконечно малую площадку, ортогональную одной из новых осей, например  $X'$ . На этой площадке действует вектор напряжения  $\mathbf{p}_{x'}$ . Его составляющие по старым осям выражают формулы Коши (8.6), в которых в данном случае индекс  $n$  заменяем на  $x'$ . Компоненты вектора  $\mathbf{p}_{x'}$  по осям  $X, Y, Z$  в соответствии с (8.6) определяют выражения

$$\begin{aligned} p_{x'x} &= \sigma_x \cdot \cos(X', X) + \tau_{yx} \cdot \cos(X', Y) + \tau_{zx} \cdot \cos(X', Z), \\ p_{x'y} &= \tau_{xy} \cdot \cos(X', X) + \sigma_y \cdot \cos(X', Y) + \tau_{zy} \cdot \cos(X', Z), \\ p_{x'z} &= \tau_{xz} \cdot \cos(X', X) + \tau_{yz} \cdot \cos(X', Y) + \sigma_z \cdot \cos(X', Z). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Проекция вектора  $\mathbf{p}_{x'}$  на какую-нибудь "новую" ось равна сумме проекций на эту ось трёх его составляющих по "старым" осям. В частности, проекция на

На рис. 8.4, б показано (имеющее форму квадрата) сечение плоскостью  $y = \text{const}$  координатного элемента объёма  $dV$ . Видно, что тангенциальные компоненты напряжений могут вызвать повороты элементарных объёмов  $dV$  упругой среды. При  $\tau_{xz} \neq \tau_{zx}$  существует вращающий момент, вызывающий поворот такого элементарного объёма  $dV$  вокруг оси  $Y$ . Поэтому если таких поворотов нет, либо мы их не рассматриваем (как при изучении "чистой деформации"), то можем полагать, что  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

ось  $X'$ , т. е.  $p_{x'x'}$  или в принятых обозначениях  $\sigma_{x'}$  равна

$$\sigma_{x'} = p_{x'x} \cdot \cos(X', X) + p_{x'y} \cdot \cos(X', Y) + p_{x'z} \cdot \cos(X', Z). \quad (8.10)$$

Подставляя в (8.10) выражения (8.9) для  $p_{x'x}$ ,  $p_{x'y}$  и  $p_{x'z}$  получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} = & \sigma_x \cdot \cos^2(X', X) + \tau_{yx} \cdot \cos(X', Y) \cdot \cos(X', X) + \tau_{zx} \cdot \cos(X', Z) \cdot \cos(X', X) + \\ & + \tau_{xy} \cdot \cos(X', X) \cdot \cos(X', Y) + \sigma_y \cdot \cos^2(X', Y) + \tau_{zy} \cdot \cos(X', Z) \cdot \cos(X', Y) + \\ & + \tau_{xz} \cdot \cos(X', X) \cdot \cos(X', Z) + \tau_{yz} \cdot \cos(X', Y) \cdot \cos(X', Z) + \sigma_z \cos^2(X', Z). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Аналогичным образом нетрудно получить выражения для всех девяти составляющих напряжения в "новой" системе координат.

Приведём в качестве примера выражения для одной из тангенциальных составляющих –  $\tau_{x'z'}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{x'z'} = & \sigma_x \cdot \cos(X', X) \cdot \cos(Z', X) + \tau_{yx} \cdot \cos(X', Y) \cdot \cos(Z', X) + \tau_{zx} \cdot \cos(X', Z) \cdot \cos(Z', X) + \\ & + \tau_{xy} \cdot \cos(X', X) \cdot \cos(Z', Y) + \sigma_y \cdot \cos(X', Y) \cdot \cos(Z', Y) + \tau_{zy} \cdot \cos(X', Z) \cdot \cos(Z', Y) + \\ & + \tau_{xz} \cdot \cos(X', X) \cdot \cos(Z', Z) + \tau_{yz} \cdot \cos(X', Y) \cdot \cos(Z', Z) + \sigma_z \cos(X', Z) \cos(Z', Z). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Известны следующие выражения преобразования декартовых координат точки  $a$  или составляющих радиуса-вектора  $L_{Oa}$  при повороте координатных осей относительно начала координат  $O$ :

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos(X', X) + y \cdot \cos(X', Y) + z \cdot \cos(X', Z), \\ y' &= x \cdot \cos(Y', X) + y \cdot \cos(Y', Y) + z \cdot \cos(Y', Z), \\ z' &= x \cdot \cos(Z', X) + y \cdot \cos(Z', Y) + z \cdot \cos(Z', Z). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Сравнивая (8.11), (8.12) и (8.13), видим, что составляющие напряжения при повороте координатных осей преобразуются как квадраты или попарные произведения формул преобразования координат. Совокупность девяти величин, преобразующихся при повороте осей координат таким образом, называется тензором (аффинным ортогональным тензором второго ранга). Следовательно, можно утверждать, что напряжённое состояние тела в данной точке полностью характеризует тензор напряжений. Из формул (8.6) и (8.8) следует, что тензор напряжений – симметричный тензор, имеющий шесть независимых составляющих.

При записи выражений для компонент тензора в произвольной

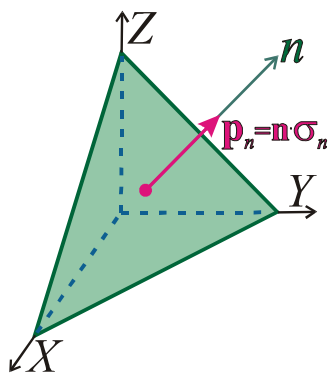
ортогональной системе координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  с ортами  $\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3$  (см. в части I раздел в.4 во Введении), например, вместо  $\cos(X, Y), \cos(X, n)$  в декартовых координатах имеем  $\cos(\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2), \cos(\mathbf{1}_1, n)$ . Вводя обозначения вида  $\cos(\mathbf{1}_i, n) = \alpha_{ni}$ , выражения для компонент тензора можем записать следующим образом:

$$p_{nm} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} \cdot \alpha_{ni} \cdot \alpha_{mj}. \quad (8.14)$$

Здесь  $n$  – направление нормали к наклонной площадке;  $m$  – направление искомой компоненты;  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2, 3, соответствующие трём координатным, направлениям. В "развёрнутом" виде это выражение представляет собой сумму членов при всех возможных комбинациях значений  $i$  и  $j$ . Равенство (8.14) позволяет определить компоненты тензора напряжений по одним координатным направлениям, например  $X', Y', Z'$ , через компоненты по другим направлениям, например  $X, Y, Z$ . Подставляя вместо  $m$  соответствующие направления компонент, нетрудно получить с помощью этой формулы выражения (8.11) и (8.12).

#### IV. Главные напряжения

На произвольно ориентированной элементарной площадке, проведенной через данную точку, действуют в общем случае как нормальное, так и касательные напряжения. Можно, однако, представить себе площадку, ориентированную таким образом, что нормаль к ней совпадает с направлением действующего на ней напряжения. Иначе говоря, на данной площадке действует только нормальное напряжение.



**Рис. 8.5.**

Главное напряжение

Определим ориентацию такой площадки и величину действующего на ней напряжения через составляющие векторов напряжений, действующих на трёх площадках, ортогональных координатным осям.

Так как направления  $n$  и  $\mathbf{p}_n$  совпадают (рис. 8.5), то

$$p_{nx} = \sigma_n \cdot \cos(n, X), \quad p_{ny} = \sigma_n \cdot \cos(n, Y), \quad p_{nz} = \sigma_n \cdot \cos(n, Z). \quad (8.15)$$

Подставив эти выражения в (8.6), получим

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n) \cdot \cos(n, X) + \tau_{yx} \cdot \cos(n, Y) + \tau_{zx} \cdot \cos(n, Z) &= 0, \\ \tau_{xy} \cdot \cos(n, X) + (\sigma_y - \sigma_n) \cdot \cos(n, Y) + \tau_{zy} \cdot \cos(n, Z) &= 0, \\ \tau_{xz} \cdot \cos(n, X) + \tau_{yz} \cdot \cos(n, Y) + (\sigma_z - \sigma_n) \cdot \cos(n, Z) &= 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Принимая во внимание, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\cos^2(n, X) + \cos^2(n, Y) + \cos^2(n, Z) = 1, \quad (8.17)$$

можем определить четыре неизвестных:  $\sigma_n, \cos(n, X), \cos(n, Y)$  и  $\cos(n, Z)$ .

Определитель системы трёх уравнений (8.16) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0, \quad (8.18)$$

чему соответствует уравнение

$$\sigma_n^3 - I_1 \cdot \sigma_n^2 + I_2 \cdot \sigma_n - I_3 = 0, \quad (8.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Кубическое уравнение (8.19) имеет три корня:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Это так называемые главные напряжения. Эти корни всегда вещественны. В общем случае имеем  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ , хотя в частных случаях два корня или все три могут быть одинаковыми.

Если главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  не одинаковы, то для каждого из них может быть определена ориентация площадки, на которой это напряжение действует. Направляющие косинусы, фиксирующие ориентацию каждой такой площадки, могут быть определены из уравнений (8.16), в которые следует подставить соответственно значения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  или  $\sigma_3$ . Можно показать, что эти три площадки взаимно ортогональны.

Если  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , то на всех любым образом ориентированных элементарных площадках, проходящих через данную точку, действуют только нормальные напряжения одинаковой величины. Это означает, что в данной точке тело испытывает состояние всестороннего сжатия или всестороннего расширения. При  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$  направление площадки, на которой действует напряжение  $\sigma_3$ , определяется, как и в общем случае, подстановкой  $\sigma_1 = \sigma_2$  и  $\sigma_3$  в (8.16). На всех площадках, ортогональных ей, действуют только нормальные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Итак, в каждой точке напряжённого тела можно провести три взаимно ортогональные площадки, на которых действуют только нормальные напряжения. Это главные площадки. Если  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ , эти площадки определены единственным образом. Когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , направления главных площадок можно выбирать произвольно.

Главные напряжения в данной точке – физические величины, не зависящие от выбора системы координат, а определяющиеся свойствами тела и действующими на него силами. Коэффициенты  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  в (8.19), (8.20) также не зависят от системы координат, так как в соответствии со свойствами корней кубического уравнения они выражаются через главные напряжения следующим образом:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \quad I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, \quad (8.21)$$

где  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  – инварианты напряжённого состояния.



Укажем без доказательства несколько свойств главных напряжений.

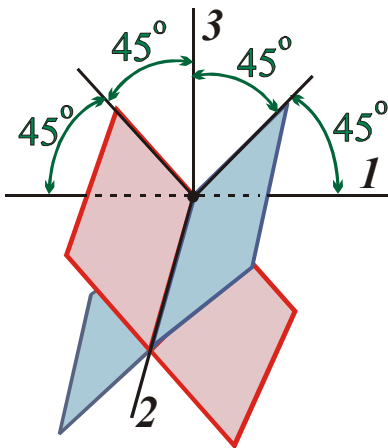
1. Если  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , то  $\sigma_1 \geq \sigma_n \geq \sigma_3$ , т. е. из всех нормальных напряжений, действующих на различных элементарных площадках, проходящих через данную точку, наибольшим и наименьшим являются, соответствующие главные напряжения.

2. Если  $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq |\sigma_3|$ , то  $|\sigma_1| \geq |\mathbf{p}_n| \geq |\sigma_3|$ , т. е. из всех полных напряжений, действующих на различных элементарных площадках, проходящих через данную точку, наибольшим и наименьшим по абсолютной величине являются соответствующие главные, напряжения.

3.  $(\tau_n)_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , т. е. наибольшее касательное напряжение равно полуразности, наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений. Это касательное напряжение действует на площадках, проходящих через ось 2 и составляющих с осями 1 и 3 угол в  $45^\circ$  (рис. 8.6).

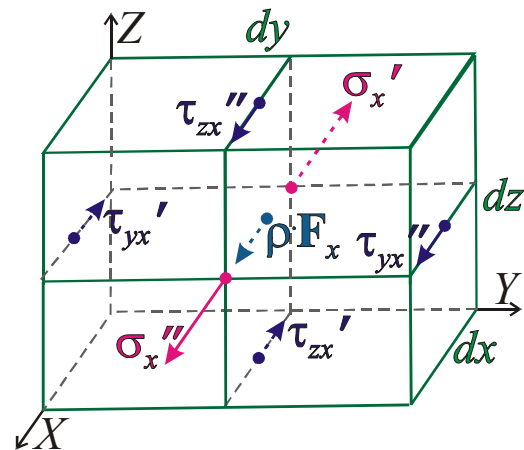
## V. Дифференциальные уравнения равновесия

Исследуем, как изменяются составляющие тензора напряжений при переходе от какой-либо точки тела к соседним точкам. Рассмотрим для этого условия равновесия элементарного объёма  $dV$  в форме параллелепипеда с рёбрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 8.7). Равновесие, т. е. отсутствие поступательного движения и отсутствие вращения, обеспечивается при равенстве нулю суммы сил и результирующего момента сил, приложенных к данному объёму. Первое из этих условий приводит к необходимости равенства нулю суммы



**Рис. 8.6.**

Площадки, на которых действуют наибольшие касательные напряжение



**Рис. 8.7.**

К составлению дифференциальных уравнений равновесия

составляющих всех сил по направлению каждой из координатных осей.

На рис. 8.7 изображены составляющие (упругих) напряжений по направлению оси  $X$ , действующие на всех шести гранях параллелепипеда и  $x$ -компонента объёмной силы  $\rho \cdot \mathbf{F}$ . Здесь  $\rho$  – объёмная плотность,  $\mathbf{F} = d\mathbf{Q}/dm$  – сила, отнесённая к единице массы или "массовая сила", а  $d\mathbf{Q}$  – сила, действующая на массу  $dm$  элемента  $dV$ . Так как  $dm = \rho \cdot dV$ , то

$\mathbf{F}=\mathbf{dQ}/dm=\mathbf{dQ}/(\rho\cdot dV)=\mathbf{dQ}/(\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz)$  и сила, отнесённая к единице объёма, т. е. "объёмная сила"  $\mathbf{dQ}/dV$  равна произведению  $\rho\cdot\mathbf{F}$ .

Напряжения на каждой из двух взаимно параллельных граней прямоугольного параллелепипеда  $dV$  в общем случае – не одинаковы по величине. На **рис. 8.7** напряжения на гранях элемента  $dV$ , наружные нормали к которому параллельны декартовым осям  $X$ ,  $Y$ , или  $Z$ , отмечены двумя штрихами  $(\sigma_x'', \tau_{yx}'', \tau_{zx}'')$ , а на остальных трёх гранях – одним штрихом  $(\sigma_x', \tau_{yx}', \tau_{zx}')$ .

Сила, действующая на каждой грани, равна произведению напряжения на площадь грани. Поэтому, например, для  $x$ - компоненты получаем следующее условие равновесия:

$$(\sigma_x''-\sigma_x')\cdot dy\cdot dz+(\tau_{yx}''-\tau_{yx}')\cdot dx\cdot dz+(\tau_{zx}''-\tau_{zx}')\cdot dx\cdot dy+\rho\cdot F_x\cdot dx\cdot dy\cdot dz=0. \quad (8.22)$$

Приращения напряжений при перемещении с одной из граней элемента  $dV$  на противоположную вследствие малости расстояний  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  между этими гранями можно заменить произведениями частных производных на расстояния:

$$(\sigma_x''-\sigma_x')=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\cdot dx, \quad (\tau_{yx}''-\tau_{yx}')=\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\cdot dy, \quad (\tau_{zx}''-\tau_{zx}')=\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\cdot dz. \quad (8.23)$$

Подставляя (8.23) в (8.22) и сокращая произведение  $dx\cdot dy\cdot dz$ , получаем дифференциальное уравнение равновесия для направления по оси  $X$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \rho\cdot F_x &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + \rho\cdot F_y &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \rho\cdot F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

Аналогичный вид имеют дифференциальные уравнения равновесия для направлений по осям  $Y$ ,  $Z$ .

Второе условие равновесия параллелепипеда  $dV$  требует равенства нулю моментов сил, действующих на тело (см. **рис. 8.4**). Соответствующие уравнения не приводят к новым зависимостям, а дают полученные ранее равенства (8.8):

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}, \quad \tau_{zy}=\tau_{yz}, \quad \tau_{xy}=\tau_{yx}.$$

Учитывая эти зависимости, уравнения (8.24) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \cdot F_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \cdot F_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \cdot F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

Принимая во внимание обозначения (8.2) и (8.3) и выражение (1.33) для дивергенции в декартовой системе координат, можем записать уравнения (8.25) так

$$\operatorname{div} \mathbf{p}_x + \rho \cdot F_x = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{p}_y + \rho \cdot F_y = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{p}_z + \rho \cdot F_z = 0. \quad (8.26)$$

В заключение приведём без вывода уравнения равновесия в цилиндрической и сферической системах координат.

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \rho \cdot F_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2 \cdot \tau_{r\varphi}}{r} + \rho \cdot F_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho \cdot F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

В сферических координатах  $R, \theta, \varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} (2\sigma_R + \tau_{R\theta} \operatorname{ctg} \theta - \sigma_\varphi - \sigma_\theta) + \rho \cdot F_R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} [3\tau_{R\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] + \rho \cdot F_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} (3\tau_{R\varphi} + 2\tau_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta) + \rho \cdot F_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

## § 2. ДЕФОРМАЦИИ

Если на тело воздействовать внешними силами, то оно изменит свою форму и объём, т. е. деформируется. Представим себе прямолинейный отрезок  $ab$  в теле до деформации. Под воздействием внешних сил он может изогнуться, в некоторых местах оказаться растянутым, в других сжатым. Описать процесс деформирования математически здесь весьма сложно, так как многообразие кривых, в которые может перейти отрезок  $ab$ , неограничено. Однако отрезок  $ab$  можно разделить на такие малые участки, чтобы они были прямолинейными до и после процесса деформации. При этом ограничении всё многообразие

изменений сводится к растяжению или сжатию малого отрезка, к его повороту или комбинации этих двух изменений. Сохранение в процессе деформирования прямолинейности малых отрезков возможно лишь при постоянстве величин деформации в рассматриваемой малой области в окрестностях данной точки. При таком дифференциальном подходе процесс деформации может быть описан математически, могут быть определены относительные перемещения каждой точки тела, как функции её координат. В данном разделе мы исследуем геометрию явления, отвлекаясь от того, какими силами оно вызвано.

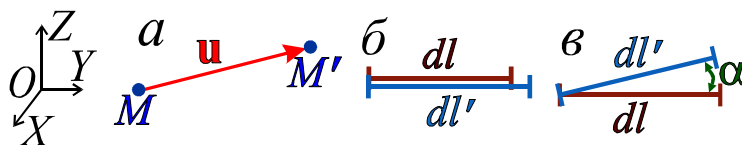
## I. Поле вектора смещения

Прямая задача теории распространения упругих колебаний – расчёт поля смещений  $\mathbf{u}$  и его производных по пространственным координатам и по времени  $t$ . Физический смысл вектора  $\mathbf{u}$  – простой.

*Вектор смещения  $\mathbf{u}$*  характеризует величину и направление смещения точки  $a$  при деформации упругой среды, например, при действии сил на такую среду и существовании в среде упругих напряжений. Пусть до приложения к упругой среде сил и возникновения упругих напряжений точка  $M$  имела декартовы координаты  $x, y, z$ . После приложения к упругой среде сил точка  $M$  переместилась (на бесконечно-малое расстояние) в точку  $M'$  с координатами  $x+dx, y+dy, z+dz$  (рис. 8.8, а).

Вектор смещения  $\mathbf{u}$  это имеющий размерность расстояния (метры) вектор с началом в точке  $M$  и концом в точке  $M'$ . В декартовых координатах  $\mathbf{u} = \mathbf{1}_x dx + \mathbf{1}_y dy + \mathbf{1}_z dz$ . В теории упругости для скалярных декартовых компонент вектора смещения приняты обозначения:  $dx=u_x=u, dy=u_y=v, dz=u_z=w$ , то есть в декартовых координатах (при применяемых в теории упругости обозначениях) вектор смещения

$$\mathbf{u} = \mathbf{1}_x u + \mathbf{1}_y v + \mathbf{1}_z w. \quad (8.28')$$



**Рис. 8.8.**

Вектор смещения  $\mathbf{u}$  (в) и изменения элементарных отрезков  $dl$  (б, в)

Абсолютная величина вектора смещения  $\mathbf{u}$ :

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Отметим, что первая производная вектора  $\mathbf{u}$  по времени  $t$ :  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  равна вектору скорости  $\mathbf{v}$  перемещения точки  $M$ , а вторая производная по времени вектора  $\mathbf{u}$ :  $\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$  равна ускорению  $\mathbf{a}$  элемента  $dV$  упругой среды с центром в этой точке.

## II. Тензор деформации

Рассмотрим деформацию в малой области  $\Omega$ , включающей в себя точку  $M$  (с координатами  $x, y, z$ ) и её окрестность (рис. 8.9). В этой области находится элементарный отрезок  $dl$  с началом в точке  $M$  и концом в точке  $M_1$ . Проекции отрезка  $dl$  на оси  $X, Y, Z$  обозначим  $dx, dy, dz$ . При деформации точка  $M$  сместится и займет положение  $M'$  а точка  $M_1$  – положение  $M_1'$ . Отрезок  $dl$  в результате деформации превратится в  $dl'$ . Смещение точки  $M$  показывает вектор  $\mathbf{u}$ , а точки  $M_1$  – вектор  $\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$ . Проекции вектора  $\mathbf{u}$  на оси  $X, Y, Z$  обозначим  $u, v$  и  $w$ , а проекции  $\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$  – соответственно  $u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w$ . Вектор  $\Delta\mathbf{u}$  и его компоненты  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$  определяют различие в смещении точек  $M$  и  $M_1$ , т. е. деформацию в рассматриваемой области.

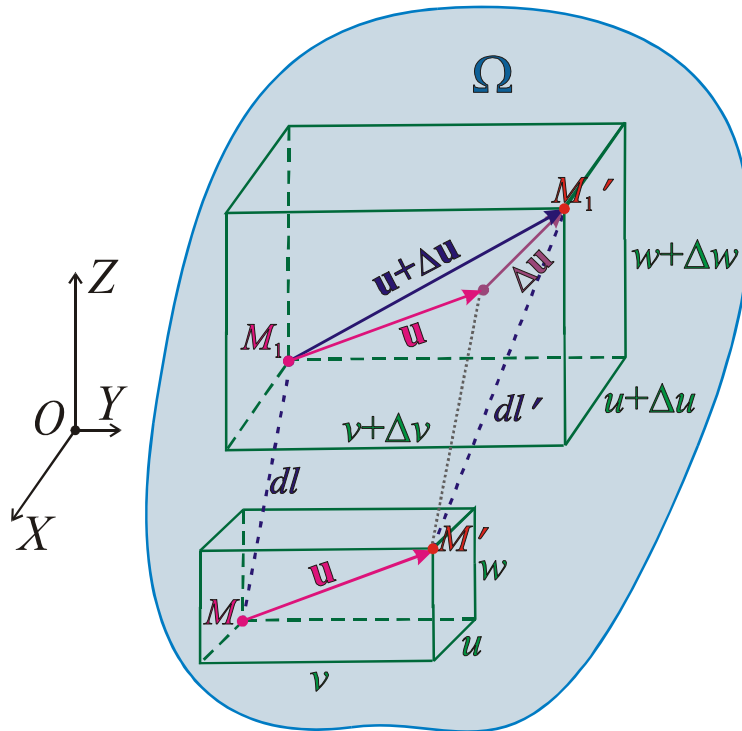


Рис. 8.9.

Деформация элементарного отрезка

Заменим приращения  $\Delta u, \Delta v$  и  $\Delta w$  дифференциалами  $du, dv$  и  $dw$ . Так как величина и направление смещения меняются от точки к точке,

то есть  $u=f_1(x, y, z), v=f_2(x, y, z), w=f_3(x, y, z)$ , дифференциалы  $du, dv$  и  $dw$  должны быть полными дифференциалами:

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Девять производных, фигурирующих в (8.29), полностью определяют деформацию в рассматриваемой малой области. Их совокупность образует *тензор деформации*.

В теории упругости принято разлагать этот тензор на симметричную и антисимметричную части. При этом смещение  $\mathbf{du}$  и его компоненты – смещения по координатным осям, записывают в виде суммы двух смещений, т. е.  $\mathbf{du} = \mathbf{du}_1 + \mathbf{du}_2, du = du_1 + du_2, dv = dv_1 + dv_2, dw = dw_1 + dw_2$ , где

$$\left. \begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz, \\ dv_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz, \\ dw_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz; \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

$$\left. \begin{aligned} du_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz, \\ dv_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz, \\ dw_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy. \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Производные и их суммы, фигурирующие в (8.30), составляют компоненты симметричной части тензора деформации, разности производных в (8.31) – компоненты его антисимметричной части.

Как будет показано ниже,  $du_1$ ,  $dv_1$  и  $dw_1$  определяют собственно деформацию среды или так называемую чистую деформацию – смещение частиц среды в результате сжатий, растяжений и изменения объёма, но не вращения;  $du_2$ ,  $dv_2$  и  $dw_2$ , напротив, определяют вращение отрезка  $dl$ , т. е. всей рассматриваемой области  $\Omega$  как целого относительно оси, проходящей через точку  $M$ . Введём следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \end{aligned} \right\} \quad (8.32)_{1-6}$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (8.32)_{7-9}$$

Тогда выражения (8.31) можем переписать в следующем виде:

$$du_2 = (\omega_y \cdot dz - \omega_z \cdot dy), \quad dv_2 = (\omega_z \cdot dx - \omega_x \cdot dz), \quad dw_2 = (\omega_x \cdot dy - \omega_y \cdot dx), \quad (8.33)$$

Эти зависимости представляют собой покомпонентную запись векторного произведения двух векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $d\mathbf{l}$ :

$$d\mathbf{u}_2 = [\boldsymbol{\omega} d\mathbf{l}]. \quad (8.34)$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}$ , в свою очередь, как следует из выражений для его компонент (8.32)<sub>7-9</sub>, является вихревой частью  $\mathbf{u}_2$  вектора смещения  $\mathbf{u}$  с компонентами  $u$ ,  $v$

и  $w$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \text{rot } \mathbf{u}. \quad (8.35)$$

Вектор  $\mathbf{du}_2$  определяет смещение из-за поворота отрезка  $dl$  на угол  $\boldsymbol{\omega}$ , т. е. малая область  $\Omega$  испытывает поворот как твёрдое тело относительно оси, проходящей через точку  $M$ . При этом относительное расположение точек в области  $\Omega$  сохраняется неизменным.

Обратимся теперь к исследованию чистой деформации, т. е. симметричной части тензора. Пользуясь обозначениями (8.32), симметричную часть тензора можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (8.36)$$

В соответствии с (8.32)<sub>4-6</sub>  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ , и  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ . Таким образом, деформированное состояние тела в окрестности данной точки фактически определяет шесть скалярных величин:  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ .

В прикладной теории упругости тензором деформации часто называют симметричную часть тензора деформации с компонентами (8.36).

Выясним физический смысл определяемых выражениями (8.36) величин. Допустим, что до деформации элементарный отрезок  $dl$  был ориентирован по оси  $X$ . Тогда его проекции на оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  будут равны соответственно  $dx$ ,  $0$ ,  $0$ . После деформации проекции отрезка  $dl'$  на оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ :  $dx' = dx + du$ ,  $dy' = dy + dv$ ,  $dz' = dz + dw$ . При указанной выше ориентации отрезка  $dl$  имеем  $dy = dz = 0$  и из (8.29) получаем

$$dx' = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dx, \quad dy' = \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot dx, \quad dz' = \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot dx. \quad (8.37)$$

Длина отрезка  $dl'$

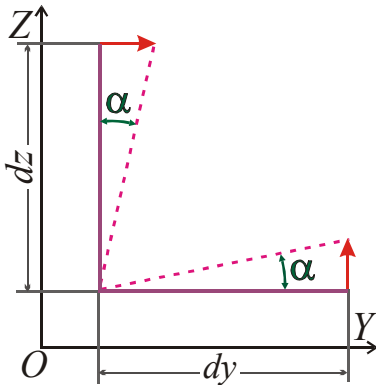
$$|dl'| = \sqrt{\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \cdot dx, \quad (8.38)$$

а относительное удлинение отрезка  $dl$  в результате деформации

$$\frac{|dl'| - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad (8.39)$$

что получается при разложении (8.38) в ряд и пренебрежении малыми членами выше первого порядка. Аналогичные выражения нетрудно получить для отрезков, ориентированных до деформации по осям  $Y$  и  $Z$ . Таким образом, можно утверждать, что диагональные компоненты тензора деформации (8.36)  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  представляют собой относительные удлинения бесконечно малых отрезков, которые до деформации были параллельны координатным осям.

Выясним физический смысл других компонент тензора деформации. Рассмотрим, как изменяется прямой угол между двумя отрезками, до деформации параллельными осям координат. Возьмём, например, отрезки  $dy$  и  $dz$  (рис. 8.10). В результате деформации каждый из этих отрезков изменит своё положение в пространстве. Проекции таких изменившихся первоначальное положение отрезков на плоскость  $YOZ$  на рисунке показаны пунктиром. В приведенном на этом рисунке примере отрезки  $dy$  и  $dz$  повернутся на (бесконечно малый) угол  $\alpha$ . При этом произойдёт "скошение" прямого угла.



**Рис. 8.10.**

Деформация сдвига

Нетрудно заметить, что (при бесконечно-малых малых деформациях) углы поворота отрезков  $dy$  и  $dz$  соответственно равны  $\partial w/\partial y$  и  $\partial v/\partial z$ . Следовательно, величина  $\gamma_{yz}=(1/2)\cdot(\partial w/\partial y+\partial v/\partial z)$  равна значению (в радианах), на которое уменьшится в результате деформации прямой угол между двумя бесконечно малыми отрезками,

до деформации параллельными координатным осям  $Y$  и  $Z$ . Аналогичный смысл имеют величины  $\gamma_{xy}$  и  $\gamma_{xz}$ . Величины  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  называют сдвигами.

Формулы, определяющие преобразование составляющих тензора деформации при повороте координатных осей, т. е. при переходе от системы координат  $x, y, z$  к системе  $x', y', z'$ , аналогичны выражениям для преобразования составляющих тензора напряжения, например (8.14).

Приведём без вывода выражения для составляющих тензора деформации в цилиндрической и сферической системах координат.

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & \gamma_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \gamma_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

В сферических координатах  $R, \theta, \varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{\partial u_R}{\partial R}, & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_R \right), & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_R}{R} + \frac{u_\theta}{R \operatorname{tg} \theta}, \\ \gamma_{R\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R} \right), & \gamma_{\theta R} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} \right), \\ \gamma_{\varphi\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R \operatorname{tg} \theta} u_\varphi + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$



### III. Главные удлинения

Сопоставим деформированное состояние бесконечно малого объёма  $dV_1$ , характеризующееся деформациями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz},$  и  $\gamma_{xy}$ , и напряжённое состояние бесконечно малого объёма  $dV_2$  другого тела, характеризующееся напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{zy}, \tau_{xz}$  и  $\tau_{xy}$ . Путём соответствующего подбора нагрузок можно создать в элементе объёма  $dV_2$  любые напряжения. В частности, можно придать им значения, пропорциональные деформациям объёма  $dV_1$ :

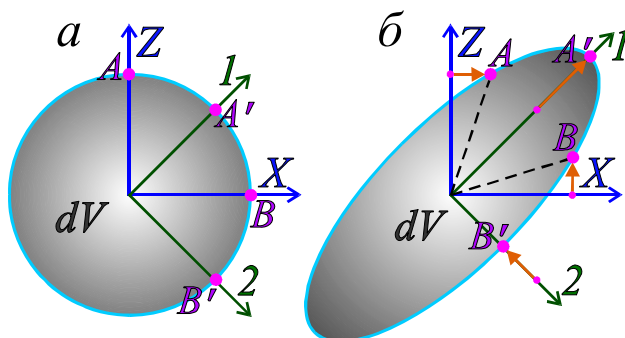
$$\sigma_x = k \cdot \varepsilon_x, \quad \tau_{yz} = k \cdot \gamma_{yz}, \quad \sigma_y = k \cdot \varepsilon_y, \quad \tau_{xz} = k \cdot \gamma_{xz}, \quad \sigma_z = k \cdot \varepsilon_z, \quad \tau_{xy} = k \cdot \gamma_{xy}, \quad (8.42)$$

где  $k$  - произвольный коэффициент пропорциональности.

В § 1 было показано, что в каждой точке напряжённого тела существуют три взаимно ортогональные площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю. Направления осей  $1, 2, 3$ , ортогональных этим площадкам, и значения нормальных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2,$  и  $\sigma_3$  определяет система уравнений (8.16). Найдя такие оси  $1, 2$  и  $3$  для элемента объёма  $dV_2$  имеем по аналогии с (8.42)

$$\sigma_1 = k \cdot \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = k \cdot \varepsilon_2, \quad \sigma_3 = k \cdot \varepsilon_3, \quad \tau_{23} = k \cdot \gamma_{23} = 0, \quad \tau_{13} = k \cdot \gamma_{13} = 0, \quad \tau_{12} = k \cdot \gamma_{12} = 0. \quad (8.43)$$

Следовательно, в элементе  $dV_1$  существуют три взаимно ортогональных направления, деформации сдвига по которым равны нулю, т. е. отрезки, ориентированные по этим направлениям, в результате деформации не испытывают поворотов. Так как  $dV_1$  - произвольный бесконечно-малый элемент объёма, можно полагать, что три таких взаимно ортогональных направления существуют в каждой точке деформированного тела. Прямые, проведенные в данной точке по этим направлениям - это *главные оси деформированного состояния* в данной точке. Вдоль главных осей происходит только удлинение или сжатие. Вдоль других направлений, наряду со сжатием и расширением, происходят сдвиговые деформации, т. е. отрезки  $dl$ , ориентированные не по главным осям, испытывают при деформации



**Рис. 8.11.**

Главные деформации

рисунке проходящий через центр шара круг. Для упрощения рассуждений будем полагать, что плоскость этого рисунка компланарна тем плоскостям, в которых лежат оси  $X$  и  $Z$ , а также главные оси  $1, 2$  тензора деформаций.

В результате деформации элементарный объём  $dV$  из шара "превратится" в

кроме сжатия-растяжения также и поворот. Относительные удлинения по направлениям главных осей называют *главными удлинениями*, или *главными деформациями*.

Рассмотрим следующий пример. Элементарный объём  $dV$  - шар (рис. 8.11, а), сечение которого - показанный на этом

эллипсоид (рис. 8.11, б), а при указанных выше условиях сечение шара из круга превратится в эллипс.

На рис. 8.11, б видим, что лежащие на главных осях 1, 2 тензора деформаций точки  $A'$  и  $B'$  смещаются только в результате удлинения или сжатия отрезков, равных до деформации радиусу шара  $dV$ . Вместе с тем точки  $A$  и  $B$  испытывают смещение также и вследствие угловой деформации (поворота).

Определим теперь направления главных осей деформации и главные удлинения. Выделим в деформированном теле параллелепипед с рёбрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , параллельными координатным осям. Допустим, что одна из главных осей совпадает с диагональю параллелепипеда  $dR$ , на концах которой находятся точки  $A$  и  $A_1$ . Если  $\varepsilon_n$  – одно из главных удлинений, то смещение точки  $A_1$  относительно  $A$  в результате деформации

$$d\mathbf{u}_1 = \mathbf{1}_R \cdot \varepsilon_n \cdot dR. \quad (8.44)$$

Проекция этого смещения на оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ :

$$\begin{aligned} du_1 &= \varepsilon_n \cdot dR \cdot \cos(\mathbf{1}_R, X), \\ dv_1 &= \varepsilon_n \cdot dR \cdot \cos(\mathbf{1}_R, Y), \\ dw_1 &= \varepsilon_n \cdot dR \cdot \cos(\mathbf{1}_R, Z). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Подставим выражения (8.45) для  $du_1$ ,  $dv_1$  и  $dw_1$  в формулы (8.30). При учёте обозначений (8.32) и того обстоятельства, что отношения  $dx/dR$ ,  $dy/dR$  и  $dz/dR$  являются направляющими косинусами для данной главной оси имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x - \varepsilon_n) \cdot \cos(\mathbf{1}_R, X) + \gamma_{yx} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, Y) + \gamma_{zx} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, Z) &= 0, \\ \gamma_{xy} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, X) + (\varepsilon_y - \varepsilon_n) \cdot \cos(\mathbf{1}_R, Y) + \gamma_{zy} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, Z) &= 0, \\ \gamma_{xz} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, X) + \gamma_{yz} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, Y) + (\varepsilon_z - \varepsilon_n) \cdot \cos(\mathbf{1}_R, Z) &= 0. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Решая эту систему с учётом известного соотношения для направляющих косинусов

$$\cos^2(\mathbf{1}_R, X) + \cos^2(\mathbf{1}_R, Y) + \cos^2(\mathbf{1}_R, Z) = 1, \quad (8.47)$$

как и ранее (см. (8.16)), можем определить четыре неизвестных –  $\varepsilon_n$ ,  $\cos(\mathbf{1}_R, X)$ ,  $\cos(\mathbf{1}_R, Y)$ ,  $\cos(\mathbf{1}_R, Z)$ .

Исключая из первых трёх уравнений величины  $\cos(\mathbf{1}_R, X)$ ,  $\cos(\mathbf{1}_R, Y)$  и  $\cos(\mathbf{1}_R, Z)$ , которые в соответствии с (8.47) не могут все одновременно быть равны нулю, получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_n & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_n & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_n \end{vmatrix} = 0. \quad (8.48)$$

Раскрывая определитель, получаем кубическое уравнение

$$\varepsilon_n^3 - I_1 \cdot \varepsilon_n^2 + I_2 \cdot \varepsilon_n - I_3 = 0. \quad (8.49)$$

Корни этого кубического уравнения –  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  являются *главными удлинениями*, или *главными значениями тензора деформации*.

Коэффициенты  $I_1, I_2$  и  $I_3$  в (8.49) определяют выражения

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ I_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \gamma_{xy}^2 - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{zx}^2, \\ I_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.50)$$

Коэффициенты  $I_1, I_2, I_3$  называют соответственно первым, вторым и третьим инвариантами деформированного состояния в данной точке. Их инвариантность, т. е. независимость от преобразования координат, вытекает из известных свойств корней кубического уравнения, согласно которым

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad I_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \quad I_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \quad (8.51)$$

Особый интерес представляет физический смысл первого инварианта.

Возьмём бесконечно малый параллелепипед с рёбрами  $dx, dy$  и  $dz$ , параллельными главным осям тензора деформации. Объём параллелепипеда до деформации  $dV=dx \cdot dy \cdot dz$ . После деформации объём

$$dV^* = dx \cdot (1 + \varepsilon_1) \cdot dy \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_3) \approx dx \cdot dy \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (8.52)$$

В (8.52) мы пренебрегаем произведениями  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2, \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3, \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1$  и  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3$  – малыми величинами 2-го и 3-го порядка. Относительное изменение объёма, т. е. объёмное расширение (сжатие), определяют выражение

$$(dV^* - dV) / dV = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_1. \quad (8.53)$$

Таким образом, первый инвариант  $I_1$  деформированного состояния имеет простой физический смысл – это относительное изменение элементарного объёма в результате деформации. Объёмное расширение (сжатие) называют дилатацией и обозначают  $\theta$ :

$$\Delta V / V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (8.54)$$

Учитывая обозначения (8.28), нетрудно заметить, что согласно (1.33) объёмная деформация может быть представлена как дивергенция вектора смещения  $\mathbf{u}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta. \quad (8.55)$$

## § 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ

### 1. Закон Гука

Одним из основных положений теории упругости является допущение о существовании однозначной линейной зависимости между деформацией и напряжением – Закон Гука:

$$\varepsilon = c \cdot \sigma. \quad (8.56)$$

где  $c$  – константа, зависящая от упругих свойств среды.

Для небольших деформаций и напряжений, рассматриваемых в теории упругости, это допущение хорошо согласуется с опытными данными. О. Коши

обобщил этот закон, установив линейную зависимость каждой составляющей деформации от всех шести компонент напряжённого состояния тела в данной точке. Обобщённый закон Гука имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= c_{11} \cdot \sigma_x + c_{12} \cdot \sigma_y + c_{13} \cdot \sigma_z + c_{14} \cdot \tau_{yz} + c_{15} \cdot \tau_{zx} + c_{16} \cdot \tau_{xy}, \\
 \varepsilon_y &= c_{21} \cdot \sigma_x + c_{22} \cdot \sigma_y + c_{23} \cdot \sigma_z + c_{24} \cdot \tau_{yz} + c_{25} \cdot \tau_{zx} + c_{26} \cdot \tau_{xy}, \\
 \varepsilon_z &= c_{31} \cdot \sigma_x + c_{32} \cdot \sigma_y + c_{33} \cdot \sigma_z + c_{34} \cdot \tau_{yz} + c_{35} \cdot \tau_{zx} + c_{36} \cdot \tau_{xy}, \\
 \gamma_{yz} &= c_{41} \cdot \sigma_x + c_{42} \cdot \sigma_y + c_{43} \cdot \sigma_z + c_{44} \cdot \tau_{yz} + c_{45} \cdot \tau_{zx} + c_{46} \cdot \tau_{xy}, \\
 \gamma_{zx} &= c_{51} \cdot \sigma_x + c_{52} \cdot \sigma_y + c_{53} \cdot \sigma_z + c_{54} \cdot \tau_{yz} + c_{55} \cdot \tau_{zx} + c_{56} \cdot \tau_{xy}, \\
 \gamma_{yx} &= c_{61} \cdot \sigma_x + c_{62} \cdot \sigma_y + c_{63} \cdot \sigma_z + c_{64} \cdot \tau_{yz} + c_{65} \cdot \tau_{zx} + c_{66} \cdot \tau_{xy}.
 \end{aligned} \tag{8.57}$$

Входящие в (8.57) 36 коэффициентов  $c_{ik}$  ( $i=1, \dots, 6, k=1, \dots, 6$ ) характеризуют упругие свойства тела в данной точке. В 1839 г. Д. Грин показал, что  $c_{ik}=c_{ki}$ , и, следовательно, число независимых упругих постоянных не превышает 21.

В общем случае в анизотропной среде коэффициенты  $c_{ik}$ , характеризующие упругие свойства тела, по разным направлениям различны. Одинаковые компоненты напряжения вызывают здесь по разным направлениям разные деформации. При наличии разных видов симметрии в упругой анизотропной среде число упругих постоянных уменьшается с 21-й до 13-и, 9-и, 6-и или 3-х. В изотропной среде упругие свойства одинаковы по всем направлениям. В этом случае, как будет показано ниже, упругие свойства тела можно выразить двумя константами.

Если коэффициенты  $c_{ik}$  – функции координат точек тела, оно является неоднородным. Если же упругие постоянные не меняются от точки к точке, тело называют однородным.

## II. Закон Гука для изотропного тела. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона

Во многих практически важных случаях упругие свойства среды одинаковы по всем направлениям. Поэтому рассмотрению связи между деформациями и напряжениями в изотропном теле уделим основное внимание.

В однородной изотропной среде направления главных осей напряжения и деформации одинаковы в каждой точке. Воспользуемся этим обстоятельством для получения уравнений, связывающих напряжения и деформации.

Направим оси  $X, Y, Z$  параллельно главным осям напряжений. Тогда система уравнений (8.57) ввиду того, что касательные напряжения  $\tau_{ik}$  и сдвиги  $\gamma_{ik}$  ( $i, k=1, 2, 3$ ) равны нулю, примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= c_{11} \cdot \sigma_1 + c_{12} \cdot \sigma_2 + c_{13} \cdot \sigma_3, \\
 \varepsilon_2 &= c_{21} \cdot \sigma_1 + c_{22} \cdot \sigma_2 + c_{23} \cdot \sigma_3, \\
 \varepsilon_3 &= c_{31} \cdot \sigma_1 + c_{32} \cdot \sigma_2 + c_{33} \cdot \sigma_3.
 \end{aligned} \tag{8.58}$$

Рассмотрим несколько различных нагрузок на тело:

$$\text{а) } \sigma_1 = \sigma > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0;$$

тогда согласно (8.58)

$$\varepsilon'_1 = c_{11} \cdot \sigma, \varepsilon'_2 = c_{21} \cdot \sigma, \varepsilon'_3 = c_{31} \cdot \sigma;$$

$$\text{б) } \sigma_2 = \sigma > 0, \sigma_1 = \sigma_3 = 0;$$

$$\varepsilon''_1 = c_{12} \cdot \sigma, \varepsilon''_2 = c_{22} \cdot \sigma, \varepsilon''_3 = c_{32} \cdot \sigma;$$

$$\text{в) } \sigma_3 = \sigma > 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0;$$

$$\varepsilon'''_1 = c_{13} \cdot \sigma, \varepsilon'''_2 = c_{23} \cdot \sigma, \varepsilon'''_3 = c_{33} \cdot \sigma.$$

При упругих свойствах тела одинаковых во всех направлениях должны выполняться следующие равенства:

$$1) \varepsilon'_1 = \varepsilon''_2 = \varepsilon'''_3;$$

$$2) \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3, \varepsilon''_1 = \varepsilon''_3, \varepsilon'''_1 = \varepsilon'''_2.$$

Так как  $c_{ik} = c_{ki}$  должно выполняться равенство

$$\varepsilon'_2 = \varepsilon'_3 = \varepsilon''_1 = \varepsilon''_3 = \varepsilon'''_1 = \varepsilon'''_2.$$

Из указанных равенств следует, что

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} \text{ и } c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32}.$$

Введём следующие обозначения:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1/E,$$

где  $E$  – модуль Юнга;

$$c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = -\nu/E,$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В литературе часто пользуются другим обозначением для коэффициента Пуассона –  $\sigma$ .

Подставляя эти обозначения в (8.58), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Итак, упругие свойства изотропной среды характеризуют две постоянные – модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Выясним их физический смысл.

Пусть упругое тело имеет форму "бруска" (например, прямоугольного параллелепипеда, либо прямого цилиндра) высотой  $l$  и с поперечным сечением  $S$ , верхний торец которого закреплён (рис. 8.12). К нижнему торцу бруска приложена сила  $F$ . Напряжение в направлении оси  $l$ :

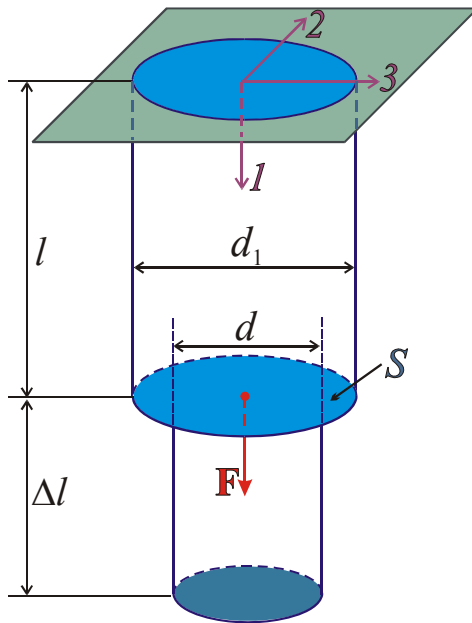
$$\sigma_1 = \sigma = F/S.$$

В направлениях, ортогональных оси  $l$ , напряжения равны нулю:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Из (8.59) следует, что

$$\varepsilon_1 = \sigma/E, \text{ а } \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \cdot \sigma/E.$$



**Рис. 8.12.**

К определению модуля Юнга и коэффициента Пуассона

Вместе с тем, нам известно, что  $\varepsilon$  – относительное удлинение (сжатие) тела в соответствующем направлении. В рассматриваемом случае

$$\varepsilon_1 = \Delta l / l.$$

Следовательно,

$$\Delta l / l = \sigma / E \quad \text{или} \quad E = \sigma \cdot l / \Delta l, \quad (8.60)$$

т. е. *модуль Юнга* равен такому напряжению, при котором длина тела увеличилась бы вдвое (при  $\Delta l = l$  имеем  $E = \sigma$ ).

Растяжение бруска сопровождается сокращением его поперечных размеров. Относительное поперечное сжатие характеризуют величины  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = (d_1 - d) / d = -\Delta d / d$$

и, следовательно,

$$-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left( \frac{\Delta d}{d} \right) / \left( \frac{\Delta l}{l} \right) = \left( \frac{\nu \cdot \sigma}{E} \right) / \left( \frac{\sigma}{E} \right) = \nu. \quad (8.61)$$

Таким образом, *коэффициент Пуассона* равен отношению относительного поперечного сжатия к относительному продольному растяжению.

Выражения (8.59) определяют зависимость между напряжениями и деформациями для главных направлений 1, 2, 3. Из этих формул можно получить соответствующие зависимости для произвольно ориентированных осей  $X, Y, Z$ . Не приводя здесь довольно громоздких выкладок, отметим, что для получения искомым зависимостей следует вначале преобразовать компоненты тензора деформации к новым осям координат по формулам вида (8.11), (8.12) или (8.14), которые в данном случае упрощаются ввиду отсутствия сдвигов в системе осей 1, 2, 3. Далее в полученных выражениях следует выразить  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  через напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  согласно (8.59). Наконец, необходимо преобразовать эти напряжения к новым осям координат по формулам вида (8.11), (8.12), (8.14).

Прделаем это для частного случая. Пусть три равенства (8.59) – это закон Гука для главных направлений  $X, Y, Z$  тензора упругих напряжений и тензора чистой деформации. То есть при таких направлениях  $X, Y, Z$  все тангенциальные напряжения  $\tau$  и деформации  $\gamma$  равны нулю.

В соответствии с правилами преобразования компонент тензора при повороте осей декартовых координат, например, для тангенциальной компоненты  $\tau_{x'y'}$ , тензора упругих напряжений и компоненты  $\gamma_{x'y'}$ , тензора чистой деформации сдвига в декартовых координатах  $x', y', z'$  с осями  $X', Y', Z'$  справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} = & \left[ \sigma_x \cos(X', X) + \tau_{yx} \cos(X', Y) + \tau_{zx} \cos(X', Z) \right] \cos(Y', X) + \\ & + \left[ \tau_{xy} \cos(X', X) + \sigma_y \cos(X', Y) + \tau_{zy} \cos(X', Z) \cos(Z', Y) \right] \cos(Y', Y) + \\ & + \left[ \tau_{xz} \cos(X', X) + \tau_{yz} \cos(X', Y) + \sigma_z \cos(X', Z) \right] \cos(Y', Z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x'y'} = & [\varepsilon_x \cos(X', X) + \gamma_{yx} \cos(X', Y) + \gamma_{zx} \cos(X', Z)] \cos(Y', X) + \\ & + [\gamma_{xy} \cos(X', X) + \varepsilon_y \cos(X', Y) + \gamma_{zy} \cos(X', Z) \cos(Z', Y)] \cos(Y', Y) + \\ & + [\gamma_{xz} \cos(X', X) + \gamma_{yz} \cos(X', Y) + \varepsilon_z \cos(X', Z)] \cos(Y', Z). \end{aligned}$$

При  $\tau_{xy}=0, \tau_{yx}=0, \tau_{xz}=0, \tau_{zx}=0, \tau_{yz}=0, \tau_{zy}=0; \gamma_{xy}=0, \gamma_{yx}=0, \gamma_{xz}=0, \gamma_{zx}=0, \gamma_{yz}=0, \gamma_{zy}=0$  из этих равенств получаем:

$$\tau_{x'y'} = \sigma_x \cos(X', X) \cos(Y', X) + \sigma_y \cos(X', Y) \cos(Y', Y) + \sigma_z \cos(X', Z) \cos(Y', Z), \quad (8.61')$$

$$\gamma_{x'y'} = \varepsilon_x \cos(X', X) \cos(Y', X) + \varepsilon_y \cos(X', Y) \cos(Y', Y) + \varepsilon_z \cos(X', Z) \cos(Y', Z).$$

Пусть при неизменном положении оси  $Z$  (то есть при одинаковом положении осей  $Z$  и  $Z'$  в "старой" и "новой" системах декартовых координат) оси  $X$  и  $Y$  в "новой" системе координат имеют направления  $X'$  и  $Y'$ . Угол поворота равен  $45^\circ$ , а направление поворота осей  $X, Y$  образует правовинтовую систему с направлением оси  $Z$  (рис. 8.12, а). Учтём, что  $\cos(45^\circ) = \sqrt{2}/2, \cos(135^\circ) = -\sqrt{2}/2, \cos(90^\circ) = 0$ . Поэтому в рассматриваемом случае имеем следующие углы между направлениями "новых" и "старых" осей:  $(X', Y) = (X', X) = (Y', Y) = 45^\circ; (Y', X) = 135^\circ; (X', Z) = (Y', Z) = 90^\circ$ .

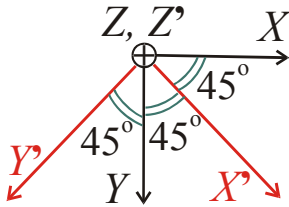


Рис. 8.12, а.

К определению выражений для деформаций сдвига в законе Гука

Принимая во внимание, что  $\cos(45^\circ) = \sqrt{2}/2, \cos(135^\circ) = -\sqrt{2}/2, \cos(90^\circ) = 0$ , из (2.19), (2.18) получаем:

$$\gamma_{x'y'} = \varepsilon_x \cdot \sqrt{2}/2 \cdot (-\sqrt{2}/2) + \varepsilon_y \cdot \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2}/2 = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)/2.$$

Следовательно,

$$\gamma_{x'y'} = \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_y - \sigma_x) \quad (8.61'')$$

При тех же углах между осями из (8.61') следует, что

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x)/2, \text{ то есть разность } (\sigma_y - \sigma_x) = 2 \cdot \tau_{x'y'}.$$

Подставляя последнее выражение для разности  $(\sigma_y - \sigma_x)$  в (8.61'') для деформации

сдвига:  $\gamma_{x'y'} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{x'y'}.$

Конечно такого вида выражения для компонент тензора чистой деформации сдвига справедливы не только в декартовых координатах с осями  $X', Y', Z'$ , но также и в декартовых координатах с любыми осями  $X, Y, Z$ . Поэтому

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx}.$$

Итак, формулы, определяющие зависимость между компонентами напряжения и деформации в любой точке однородного изотропного тела для произвольно выбранных декартовых координат  $X, Y, Z$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{zx} &= \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{zx}, \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xy} &= \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{8.62}$$

Если сложить левые и правые части выражений (8.62) для  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$ , получим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)].$$

Принимая во внимание, что в соответствии с (8.54) сумма в левой части этого равенства представляет собой дилатацию или объёмное расширение  $\theta$ , получаем

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \tag{8.63}$$

### III. Выражение напряжений через деформации

В ряде случаев при теоретических выкладках и инженерных расчётах возникает необходимость выразить или рассчитать напряжения по заданным или измеренным деформациям. Получим соответствующие зависимости для однородной изотропной среды.

Прибавим и вычтем из выражения (8.62) для  $\varepsilon_x$  член  $\nu \cdot \sigma_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu \cdot \sigma_x - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)].$$

Заменяя в этом выражении сумму трёх нормальных напряжений, в соответствии с (8.63) имеем

$$\varepsilon_x = \sigma_x \cdot \frac{(1+\nu)}{E} - \frac{\nu \cdot \theta}{(1-2\nu)}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_x = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \theta + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x. \tag{8.64}$$

Аналогичный вид имеют выражения для нормальных напряжений  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ .

Из (8.62) получаем выражение для касательного напряжения  $\tau_{yz}$  как функцию деформации сдвига  $\gamma_{yz}$ :

$$\tau_{yz} = \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \gamma_{yz}. \tag{8.65}$$

Аналогичный вид имеют выражения для касательных напряжений  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{xy}$ .

Для более компактной записи формул вида (8.64) и (8.65), выражающих напряжения через деформации, обычно пользуются следующими обозначениями:



$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}. \quad (8.66)$$

Величины  $\lambda$  и  $\mu$ , характеризующие упругие свойства изотропной среды, называют *упругими константами (постоянными) Ламэ*. Воспользовавшись ими, запишем выражения для всех компонент напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot \theta + 2\mu \cdot \varepsilon_x, & \tau_{yz} &= 2\mu \cdot \gamma_{yz}, \\ \sigma_y &= \lambda \cdot \theta + 2\mu \cdot \varepsilon_y, & \tau_{zx} &= 2\mu \cdot \gamma_{zx}, \\ \sigma_z &= \lambda \cdot \theta + 2\mu \cdot \varepsilon_z, & \tau_{xy} &= 2\mu \cdot \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Константу  $\mu$  называют *модулем сдвига*, так как от неё зависит величина сдвига при заданном касательном напряжении. В жидкости сдвиговые деформации отсутствуют и  $\mu=0$ .

Другая константа Ламэ –  $\lambda$  простого физического истолкования не имеет.

Выразим напряжения через объёмную деформацию. Сложив левые и правые части выражений для  $\sigma$  в (8.67), получим:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda \cdot \theta + 2\mu \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

или, заменив здесь в соответствии с (8.54) сумму деформаций дилатацией  $\theta$ , имеем

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2\mu) \cdot \theta. \quad (8.68)$$

Рассмотрим далее случай всестороннего сжатия упругого тела. Примем, что тело подвергается всестороннему давлению, направленному по нормальям к поверхности, что происходит, например, при погружении твёрдого тела в жидкость. При отсутствии объёмных сил тело будет находиться в равновесии при условии, если

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma \quad \text{и} \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0.$$

В этом случае имеем вместо (8.68)

$$-\sigma = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) \cdot \theta. \quad (8.69)$$

Знак «минус» обусловлен тем, что напряжения имеют направления противоположные наружным нормальям к поверхности тела. Введём обозначение

$$K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu). \quad (8.70)$$

Тогда из (8.69) получаем

$$\sigma = -K \cdot \theta. \quad (8.71)$$

Параметр  $K$  называют модулем всестороннего сжатия. Его можно выразить через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ :

$$K = \frac{1}{3} \cdot \frac{E}{1 - 2\nu}. \quad (8.72)$$

Итак, упругие свойства изотропной среды определяют две константы. В

зависимости от характера рассматриваемой задачи можно воспользоваться одной из следующих трёх пар величин:  $E$  и  $\nu$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ ,  $K$  и  $\mu$ . Выше были приведены формулы, определяющие  $\lambda$  и  $\mu$  через  $E$  и  $\nu$ . Нетрудно получить обратные зависимости:

$$E = \frac{\mu \cdot (2\mu + 3\lambda)}{(\mu + \lambda)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\mu + \lambda)}. \quad (8.73)$$

Все коэффициенты упругости – неотрицательные величины. Поэтому из (8.73)<sub>2</sub> следует, что значение коэффициента Пуассона должно быть заключено между 0 и 0.5. Экспериментальные данные показывают, что для горных пород он обычно лежит в пределах от 0.15 до 0.35.

В заключение приведём без вывода зависимости для сферической системы координат связывающие нормальные компоненты напряжения с деформациями. Такие зависимости понадобятся нам в дальнейшем.

$$\begin{aligned} \sigma_R &= (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial u_R}{\partial R} + 2\lambda \cdot \frac{u_R}{R}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi = \lambda \cdot \frac{\partial u_R}{\partial R} + 2(\lambda + \mu) \cdot \frac{u_R}{R}. \end{aligned} \quad (8.74)$$

#### IV. Упругий потенциал

В процессе деформации упругого тела действующие на него силы совершают работу. Происходит накопление потенциальной энергии. После снятия нагрузки эта энергия; переходит в кинетическую и совершает работу движения. В результате восстанавливается первоначальное состояние тела.

Представим себе брусок с длинной стороной, направленной по оси  $X$ . Один конец его закреплен, а к другому приложена растягивающая сила  $F$ . Площадь поперечного сечения бруска  $S$ , а длина  $l$  (см. [рис. 8.12](#)). Единственная ненулевая компонента напряжения в бруске  $\sigma_x = F/S$ . Компонента деформации по оси  $X$  –  $\varepsilon_x$ , и растяжение бруска  $\Delta l$  будет равно  $\varepsilon_x \cdot l$ . Элементарному изменению деформации  $d\varepsilon_x$  соответствует элементарная работа  $dA$ , равная произведению силы на соответствующее перемещение:

$$dA = \sigma_x \cdot S \cdot d\varepsilon_x \cdot l. \quad (8.75)$$

Напряжение  $\sigma_x$  мы можем выразить через деформацию в соответствии с законом Гука (8.59), из которого следует, что при  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = 0$  напряжение  $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ . Произведём соответствующую подстановку в (8.75) и определим работу, совершенную за весь процесс деформирования:

$$A = S \cdot l \cdot E \cdot \int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x d\varepsilon_x = E \cdot \frac{\varepsilon_x^2}{2} \cdot S \cdot l. \quad (8.76)$$

Эта работа соответствует потенциальной энергии упругой деформации. Потенциальная энергия, приходящаяся на единицу объёма тела – удельная упругая энергия, равна  $E \cdot \varepsilon_x^2 / 2$ . Если воспользоваться напряжением, можем записать эту удельную энергию в виде:  $\sigma_x \cdot \varepsilon_x / 2$ .

В общем случае для определения потенциальной энергии единицы объёма

сплошной упругой среды, которая деформирована в результате действия различно направленных сил, следует учесть девять компонент тензора напряжений и девять компонент тензора деформаций. Упругая энергия единицы объёма будет представлять собой сумму удельных энергий вида  $\sigma \cdot \varepsilon / 2$ , каждая из которых обязана определённой компоненте деформации и напряжения. При записи такого выражения следует учесть попарное равенство шести компонент тензора деформации и шести компонент тензора напряжений:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

В результате суммарная упругая энергия единицы объёма

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{yz} \gamma_{yz} + 2\tau_{xz} \gamma_{xz} + 2\tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (8.77)$$

Потенциальная энергия, отнесённая к единице объёма упругого тела, определяет упругий потенциал в данной точке. Компоненты деформации или напряжения могут быть получены из выражения для  $W$  в виде соответствующих частных производных. Например,

$$dW/d\varepsilon_x = (1/2) \cdot \sigma_x, \quad dW/d\sigma_x = (1/2) \cdot \varepsilon_x, \dots$$

# Глава девятая. Распространение упругих колебаний

## § 1. УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

### I. Уравнение передачи колебаний в изотропной упругой среде

Если внешние силы, приложенные к данному участку тела, изменяются во времени, изменяются и созданные ими напряжения и деформации. Происходит смещение частиц, которое через соседние частицы передается другим частям тела. Упругость среды приводит к возвращению частиц через некоторое время к первоначальному положению. Возникшие возмущения распространяются в теле от места приложения сил с конечной скоростью в виде упругой волны. Источником упругих колебаний в горных породах могут быть взрыв, ударная нагрузка, очаг землетрясения и т. д.

Ранее были получены дифференциальные уравнения статического равновесия элементарного объёма упругой среды (8.24). В условиях, когда внешняя сила вызывает смещение такого объёма, сумма сил, действующих на элементарный объём, в соответствии со вторым законом Ньютона равна произведению его массы на ускорение. Как уже было отмечено, ускорение  $\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ . Уравнения (8.24) для декартовых компонент примут в этом случае следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot F_x &= \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho \cdot F_y &= \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \cdot F_z &= \rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $t$  – время.

Система уравнений (9.1) определяет зависимость смещения по каждой из координатных осей от действующих в этом направлении напряжений. Пользуясь законом Гука, мы можем заменить напряжения в левой части уравнений деформациями, а затем – смещениями. В результате можно будет получить уравнение динамического равновесия, определяющее передачу колебаний через упругую среду. Подставляя в первое уравнение (9.1) выражения для напряжений, в соответствии с (8.67) имеем

$$\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + 2\mu \cdot \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial y} + 2\mu \cdot \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot F_x = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Далее, переходя к смещениям, согласно (8.32) получаем

$$\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \cdot \left[ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \right] + \rho \cdot F_x = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Перепишем последнее выражение в следующем виде:

$$\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot F_x = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Учитывая, что согласно (8.55), (1.66) сумма производных в первых скобках представляет собой Дилатацию  $\theta$ , а во второй – выражение для лапласиана  $u$  в декартовой системе координат ( $\Delta u = \nabla^2 u$ ), получаем уравнение для  $u$  и аналогичным образом для  $v$  и  $w$  – компонент смещений по двум другим координатным направлениям:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \cdot \nabla^2 u + \rho \cdot F_x &= \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \cdot \nabla^2 v + \rho \cdot F_y &= \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \cdot \nabla^2 w + \rho \cdot F_z &= \rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Умножим левые и правые части уравнений (9.2) на единичные векторы  $\mathbf{1}_x$ ,  $\mathbf{1}_y$  и  $\mathbf{1}_z$  соответственно и сложим их почленно. В результате получаем уравнение в векторной форме:

$$(\lambda + \mu) \cdot \text{grad } \theta + \mu \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \cdot \mathbf{F} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (9.3)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{1}_x \cdot u + \mathbf{1}_y \cdot v + \mathbf{1}_z \cdot w$  – вектор смещения.

Уравнение (9.3), определяющее распространение колебаний в упругой среде, называют *уравнением Ламэ*. При его решении упругие постоянные  $\lambda$  и  $\mu$ , плотность  $\rho$  и силу  $\mathbf{F}$  полагают заданными. Начальные и граничные условия (см. раздел III) вытекают из условий задачи. В результате решения определяют поле вектора смещения  $\mathbf{u}$  и далее составляющие тензора деформации и напряжения.

## II. Волновые уравнения. Продольные и поперечные волны

Поле упругих колебаний определяет в каждой точке вектор смещения  $\mathbf{u}$ . Оно может быть представлено в виде суммы двух векторных полей. Одно из них ( $\mathbf{u}_p$ ) является потенциальным и его можно выразить через скалярный потенциал  $\varphi$ :

$$\mathbf{u}_p = \text{grad } \varphi; \quad (9.4)$$

другое поле – чисто вихревое (соленоидальное) и может быть описано с помощью векторного потенциала  $\vec{\psi} = \boldsymbol{\Psi}$ :

$$\mathbf{u}_S = \text{rot } \boldsymbol{\psi}; \quad (9.5)$$

Следовательно поле вектора смещения и можно выразить через потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S = \text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}. \quad (9.6)$$

Согласно (1.13), (1.27), (9.6) скалярные компоненты вектора смещения и по осям  $X, Y, Z$  декартовой системы координат  $x, y, z$  определяют выражения

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Аналогично выражению (9.6) для поля вектора смещения представим поле внешних сил в виде потенциальной и вихревой составляющих, каждую из которых можно выразить соответственно скалярным потенциалом  $\Phi$  и векторным потенциалом  $\vec{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}$ :

$$\mathbf{F} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \boldsymbol{\Psi}. \quad (9.8)$$

Подставляя в уравнение Ламэ (9.3) выражения (9.6) и (9.8) и изменяя порядок дифференцирования, получаем

$$\text{grad} \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \Phi \right] + \text{rot} \left[ \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\Psi} \right] = 0. \quad (9.9)$$

Уравнению (9.9) удовлетворим, положив

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \varphi = \Phi, \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Psi}. \quad (9.11)$$

Уравнения (9.10) и (9.11) (см. уравнения (6.41) в главе шестой) являются неоднородными волновыми уравнениями. Уравнение (9.11) для векторов  $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\Psi}$  можем заменить совокупностью трёх скалярных уравнений для составляющих  $\psi_x$  и  $\Psi_x, \psi_y$  и  $\Psi_y, \psi_z$  и  $\Psi_z$ .

Тот факт, что уравнение Ламэ распадается на два независимых уравнения, свидетельствует о том, что в безграничной упругой среде могут существовать два независимых типа возмущений (упругих волн). Выясним характер каждого из них. Вспомним, что в соответствии с (8.55) и (8.35)  $\text{div } \mathbf{u} = \theta$  и  $\text{rot } \mathbf{u} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}$ , где  $\theta$  – дилатация или объёмное расширение - сжатие среды, а  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор вращения, характеризующий повороты элементарных объёмов среды. Очевидно, что

$$\text{div } \mathbf{u} = \theta = \text{div } \mathbf{u}_P = \text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi, \quad \text{rot } \mathbf{u}_P = \text{rot grad } \varphi = 0. \quad (9.12)$$

Таким образом, распространение колебаний, описываемых уравнением

(9.10), характеризует изменение объёмов отдельных областей среды, т. е. их сжатие и расширение. При этом происходит поступательное и возвратное движение частиц среды. Вращение элементарных объёмов здесь отсутствует. Этот тип волн получил название *продольных*, их обозначают индексом  $P$ .

Существенно иной тип упругих колебаний определяет уравнение (9.11). В этом случае

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_S &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \operatorname{rot} \mathbf{u}_S = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = 2 \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Распространение упругих колебаний сопровождается здесь поворотами элементарных объёмов среды. Явления сжатия и расширения в данном случае отсутствуют. Волны этого типа в соответствии с направлением смещения частиц среды получили название *поперечных*, их обозначают индексом  $S$ .

Продольные и поперечные волны в однородной изотропной среде распространяются независимо друг от друга. Продольные волны не генерируют поперечных, и наоборот. В неоднородных средах, когда  $\lambda$ ,  $\mu$ , и  $\rho$  зависят от координат, продольные и поперечные волны не разделяются. Одна из этих волн может порождать другую.

В области, где отсутствуют внешние силы, т. е.  $\Phi=0$  и  $\Psi=0$ , выражения (9.10), (9.11) превращаются в однородные волновые уравнения (см. выражения (6.23) в главе шестой):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \varphi = 0, \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (9.15)$$

Аналогичным уравнениям при  $\Phi=0$  и  $\Psi=0$  в однородной по  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  среде удовлетворяет потенциальная и чисто-вихревая составляющие поля смещений;

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_P}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_P = 0, \quad (9.14')$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_S}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_S = 0. \quad (9.15')$$

Применяя поочередно операции  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$  к уравнению распространения колебаний (9.3) и учитывая зависимости (8.35) и (8.55), можем получить уравнения для дилатации и вектора вращения:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \theta = \operatorname{div} \Phi, \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \Psi. \quad (9.17)$$

Сходство этих уравнений с уравнениями (9.10) и (9.11) для потенциалов  $\varphi$  и  $\boldsymbol{\psi}$  свидетельствует о связи пространственно-временного распределения соответствующих величин.

### III. Начальные и граничные условия

Для однозначного определения поля смещений с помощью уравнений (9.10) – (9.11) и (9.14) – (9.15), допускающих бесконечное множество решений, необходимо задать дополнительные условия – начальные, граничные. Как и в случае переменного электромагнитного поля, требуемые дополнительные условия вытекают из теоремы единственности.

Если требуется определить поле смещений в интервале времени  $[0, t_M]$ ,  $0 \leq t \leq t_M$ , то начальные условия сводятся к заданию потенциала и его производной для момента времени  $t=0$  во всех точках пространства, где идёт поиск решения

$$\varphi(a, 0) = \varphi_0(a), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi'_0(a). \quad (9.18)$$

Если до момента  $t=0$  смещения в среде отсутствовали, эти условия задаются в следующем виде:

$$\varphi_0(a)=0, \quad \varphi'_0(a)=0. \quad (9.19)$$

Такая форма записи начальных условий означает отсутствие в среде других источников, кроме тех, которые начали возбуждать упругие волны в момент времени  $t=0$ .

Граничные условия включают в себя краевые условия и условия сопряжения (см. (1.110'), (1.104') – (1.106') и замечание 10 в разделе II, § 8 главы первой). Краевые условия должны быть заданы на поверхности  $S$ , ограничивающей область  $V$ , для которой ведём поиск решения. Способы задания этих условий могут быть различными. В зависимости от характера задачи на поверхности  $S$  могут быть заданы потенциал и его нормальная производная, в других случаях – смещения, иногда напряжения. На части поверхности могут быть заданы напряжения, на другой части – смещения. Чаще всего приходится встречаться с внешней задачей, когда область, в которой мы определяем поле смещений, простирается до бесконечности. В этом случае, кроме условий на поверхности  $S$ , ограничивающей область  $V$  изнутри, требуется выполнение условий на бесконечности.

Задание краевых условий на поверхности  $S$  часто позволяет перейти к решению однородных волновых уравнений вместо уравнений (9.10), (9.11) с ненулевой правой частью. Действие источника, находящегося вне области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ , заменяется условиями на этой поверхности и решение однородного уравнения в области  $V$  должно удовлетворять этим условиям.

Что касается условий сопряжения (граничных условий), то они определяют поведение поля на особых поверхностях, где происходит скачкообразное изменение упругих параметров среды. Более подробно об этих условиях будет сказано в разделе I § 4, а здесь отметим следующее.

Условия сопряжения могут быть записаны на основании следующих соображений. Допустим, что поверхность  $S$  разделяет среду на две области – одну с упругими и плотностными параметрами  $\lambda_1, \mu_1, \rho_1$  и другую с



параметрами  $\lambda_2, \mu_2, \rho_2$ . Напряжения, действующие на обеих сторонах площадки, совпадающей с границей, должны быть одинаковыми, как и на всякой поверхности внутри среды. Если взять декартову систему координат, оси которой ориентированы таким образом, что ось  $Z$  ортогональна границе, а оси  $X$  и  $Y$  лежат в плоскости  $z=C$ , где  $C=\text{const}$ , касательной к границе в данной точке, то условие равенства напряжений можем записать следующим образом:

$$\text{при } z=C \quad (\sigma_z)_2 = (\sigma_z)_1, \quad (\tau_{zx})_2 = (\tau_{zx})_1, \quad (\tau_{zy})_2 = (\tau_{zy})_1. \quad (9.20)$$

Учитывая уравнения (8.67) и (8.32), устанавливающие связь между напряжениями и деформациями и выражающие последние через смещение, получаем вместо (9.20)

$$\begin{aligned} \lambda_2 \cdot \theta_2 + 2\mu_2 \cdot \frac{\partial w_2}{\partial z} &= \lambda_1 \cdot \theta_1 + 2\mu_1 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial z}, \\ \text{при } z=C: \quad \mu_2 \cdot \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) &= \mu_1 \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right), \\ \mu_2 \cdot \left( \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) &= \mu_1 \cdot \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (9.21)$$

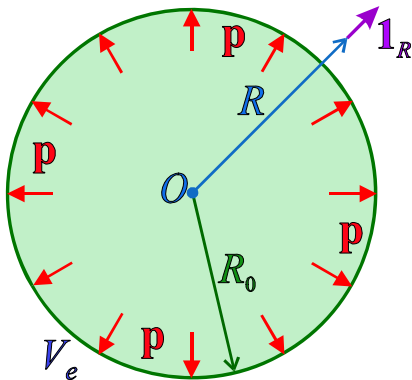
Вектор смещения  $\mathbf{u}$  и его компоненты  $u, v, w$  при переходе через границу  $S$  также должны меняться непрерывно. Действительно, допущение о том, что нормальная к  $S$  компонента вектора  $\mathbf{u}$  претерпевает разрыв, означало бы, что одна среда должна отрываться от другой или проникать в другую. Предположение о разрывности тангенциальной составляющей означает проскальзывание одной среды относительно другой. При упругих деформациях в твёрдых телах эти явления не могут существовать. Следовательно,

$$\text{при } z=C: \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \quad \text{или} \quad u_2 = u_1, \quad v_2 = v_1, \quad w_2 = w_1. \quad (9.22)$$

Уравнения (9.21) и (9.22) служат примером (при  $z=C$ ) условий сопряжения, которым должно удовлетворять решение волновых уравнений.

## § 2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

### I. Сферические продольные волны



**Рис. 9.1.**

Сферический источник продольных волн

Одним из простейших видов упругих колебаний являются сферические волны. Рассмотрим основные особенности сферических продольных волн, возбуждаемых сферическим источником.

Допустим, что источник колебаний представляет собой сферическую полость радиуса  $R=R_0$  (рис. 9.1). К внутренней стороне полости равномерно приложено ортогональное границе полости переменное давление  $p$ . В сферических координатах с началом  $O$  в центре полости давление при  $R=R_0$   $p=\mathbf{1}_R p(t)$ . Вид функции  $p$ , т. е. характер зависимости давления  $p$

от времени, пока оставляем неопределённым.

Давление, приложенное к поверхности полости, вызывает смещение частиц упругой среды во внешней области  $V_e$ . Этот процесс распространяется в виде упругой волны, расходящейся от источника. Если принять допущение, что внешние силы (давление  $p$  в полости) начали действие в момент времени  $t=0$ , т. е.

$$p(t)=0, \quad \Phi(t)=0 \quad \text{при } t < 0,$$

то до момента  $t=0$  какие-либо возмущения в среде (в области  $V_e$ ) отсутствовали, т. е. начальные условия запишем в виде (9.19)

$$\varphi(a, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Вследствие сферической симметрии источника, однородности и изотропности среды возникающее возмущение также обладает сферической симметрией. Поэтому воспользуемся сферической системой координат. Из-за центральной симметрии задачи производные по координатам  $\theta$  и  $\varphi$  равны нулю (см. раздел III, § 9 главы первой) и уравнение (9.10) в данном случае согласно (1.66") можем записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) = \Phi(t). \quad (9.23)$$

Повсюду, кроме поверхности  $R=R_0$ , внешние силы равны нулю. Так как нас интересует поле смещений во внешней области  $V_e$  ( $R > R_0$ ), за пределами полости, можем вместо (9.23) полагать, что в этой области

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) = 0. \quad (9.24)$$

Примем во внимание, что

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2(R \cdot \varphi)}{\partial R^2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left( R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \varphi \right) = \frac{1}{R} \left( R \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial R}.$$

Правая часть этого равенства идентична сумме в скобках в выражении (9.24). Так как аргументы  $t$  и  $R$  функции  $\varphi$  – взаимно независимы, то  $R \cdot (\partial^2 \varphi / \partial t^2) = \partial^2(R \cdot \varphi) / \partial t^2$  и уравнение (9.24) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2(R \cdot \varphi)}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2(R \cdot \varphi)}{\partial R^2} = 0. \quad (9.25)$$

Выражение (9.25) представляет собой одномерное волновое уравнение – уравнение струны для произведения  $(R \cdot \varphi)$ . Решение его (см. раздел II, § 3 главы шестой) можно записать в виде

$$R \cdot \varphi = f_1 \left( t - \frac{R}{v_p} \right) + f_2 \left( t + \frac{R}{v_p} \right), \quad (9.26)$$

где

$$v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}. \quad (9.26')$$

Первое слагаемое в правой части выражения (9.26) определяет возмущение (произвольной формы), удаляющееся от источника со скоростью  $v_p$  (расходящаяся сферическая волна). Действительно, если аргумент функции  $f_1$  имеет одинаковые значения, то сохраняется постоянной и сама функция. При временах  $t_2$  и  $t_1$  значения функции  $f_1$  будут одинаковы, если выполняется равенство

$$t_2 - R_2 / v_p = t_1 - R_1 / v_p. \quad (9.27)$$

Следовательно, возмущение, которое наблюдалось в момент времени  $t_1$  в точках на расстоянии  $R_1$  от начала координат, переместится и в момент времени  $t_2$  должно находиться через промежуток времени  $t_2 - t_1$  на расстоянии  $R_2$ , от начала координат, равном

$$R_2 = R_1 + v_p \cdot (t_2 - t_1). \quad (9.28)$$

Выражение (9.28) подтверждает то, что коэффициент  $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$  определяет скорость распространения продольных колебаний (волн) в упругой среде. Скорость эту полностью определяют упругие постоянные Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотность  $\rho$  среды.

Второе слагаемое (функция  $f_2$ ) в (9.26) характеризует волну, сходящуюся к источнику. По мере возрастания времени  $t$  координата  $R$  должна уменьшаться, если потребовать сохранения фиксированным аргумента  $t + R/v_p$  функции  $f_2$ , а, следовательно, и функции  $f_2(t + R/v_p)$  в выражении (9.26). Нас будет интересовать расходящаяся волна, создаваемая источником в полости  $R_0 < 0$ , поэтому следует положить  $f_2 = 0$ . Этого требует и начальное условие (9.19). Поэтому решение волнового уравнения (9.25) имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{R} \cdot f_1 \left( t - \frac{R}{v_p} \right). \quad (9.29)$$

Поле смещений в соответствии с (9.4), (9.29) будет определять выражение

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_R \cdot u_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial R} = \mathbf{1}_R \cdot \left[ \frac{1}{R} \cdot f_1' \left( t - \frac{R}{v_P} \right) - \frac{1}{R^2} \cdot f_1 \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right], \quad (9.30)$$

где  $f_1'(t-R/v_P) = \frac{\partial}{\partial R} f_1(t-R/v_P)$ .

Выражение (9.30) соответствует полю смещений  $\mathbf{u}$  со сферической симметрией (см. [рис. 1.18, в](#) в главе первой). Векторы смещения в области  $V_e$  везде направлены радиально ( $\mathbf{u} \parallel \mathbf{1}_R$  или  $\mathbf{u} \uparrow \downarrow \mathbf{1}_R$ ) и на одинаковых расстояниях  $R$  от источника в данный момент времени  $t$  смещения  $u_P$  имеют одинаковую величину. Возмущение такого вида называется продольной сферической волной. Из формулы (9.30) следует, что смещение частиц определяют два слагаемых. Так как первое слагаемое в правой части выражения (9.30) содержит множитель  $1/R$ , а второй – множитель  $1/R^2$ , их вклад в формирование поля смещений на разных расстояниях от источника различен. Первый член играет определяющую роль при значительном удалении от источника, а второй – вблизи этого источника.

Рассмотрим теперь возбуждение продольной волны сферическим источником при различном характере функции  $p(t)$ .

Допустим вначале, что давление  $p$  на стенке сферической полости меняется со временем по гармоническому закону. Как было показано в § 6 главы шестой, этот случай имеет особое значение, так как полученное решение на основе принципа суперпозиции и преобразования Фурье позволяет построить решения, для различных функций возбуждения, в том числе импульсных. Будем полагать, что начальная фаза давления  $p$  равна нулю, т. е.  $p = p_0 \cdot \cos(\omega t)$ . В комплексной форме давление

$$\overset{\vee}{p} = p_0 \cdot \exp(i \cdot \omega t), \quad (9.31)$$

где  $p_0$  – (действительная) амплитуда.

В отличие от электродинамики, где временной фактор чаще выбирают в виде  $\exp(-i \cdot \omega t)$ , в теории распространения упругих колебаний обычно применяют для временного фактора запись  $\exp(i \cdot \omega t)$ .

В случае гармонически меняющегося поля потенциал  $\varphi = \text{Re}(\overset{\vee}{\varphi})$ ,  $\overset{\vee}{\varphi} = \overset{\vee}{\varphi}_0(a) \cdot \exp(i \cdot \omega t)$ , где  $\overset{\vee}{\varphi}_0(a)$  – не зависящая от времени  $t$  комплексная амплитуда. При этом из однородного волнового уравнения (9.14) получаем для поля  $\overset{\vee}{\varphi}$  уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 \overset{\vee}{\varphi} - k_P^2 \cdot \overset{\vee}{\varphi} = 0, \quad \text{где } k_P^2 = \omega/v_P,$$

а вместо решения (9.29) уравнения (9.14) – следующее выражение для  $\overset{\vee}{\varphi}$ :

$$\overset{\vee}{\varphi} = \frac{C}{R} \cdot \exp \left[ i \omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right], \quad (9.32)$$

где  $C$  – постоянная, не зависящая от  $R$  и  $t$ .

Для определения  $C$  воспользуемся граничными условиями на поверхности полости, где радиальное нормальное напряжение должно быть равно (взятому с противоположным знаком) давлению  $p(t)$ :

$$\sigma_R = -p(t) \text{ при } R=R_0. \quad (9.33)$$

Знак «минус» в этом выражении необходим потому, что положительным в теории упругости считается напряжение, вызывающее растяжение, а при  $p>0$  имеем сжатие у границы полости. Выражая напряжение  $\sigma_R$  через смещения, а последние – через потенциал  $\varphi$ , в соответствии с (8.74) и (9.4) имеем:

$$\text{при } R=R_0: \left[ (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial^2 \overset{\vee}{\varphi}}{\partial t^2} + \frac{2\lambda}{R} \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\varphi}}{\partial R} \right] = -\overset{\vee}{p}(t). \quad (9.34)$$

Подставляя в (9.34) выражения (9.32) для  $\overset{\vee}{\varphi}$  и (9.31) для  $\overset{\vee}{p}$  и выполняя дифференцирование, получаем

$$C = -\frac{p_0 \cdot R_0 \cdot \exp(i\omega R_0/v_P)}{\left( \frac{4\mu}{R_0^2} - \rho \cdot \omega^2 \right) + i\omega \cdot \frac{4\mu}{R_0 v_P}}. \quad (9.35)$$

Отсюда следует, что в области  $V_e$ , при  $R>R_0$

$$\overset{\vee}{\varphi}(R, t) = -\frac{p_0 \cdot \frac{R_0}{\rho} \cdot \exp(i\omega \tau)}{\left( \omega_{0P}^2 - \omega^2 \right) + 2i\omega h_P}, \quad (9.36)$$

где

$$\omega_{0P} = 2 \cdot v_S / R_0, \quad h_P = \omega_{0P} \cdot v_S / v_P, \quad v_S^2 = \mu / \rho, \quad \tau = t - (R - R_0) / v_P. \quad (9.37)$$

Переходя к смещениям, получаем

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\varphi}}{\partial R} = \mathbf{1}_R \cdot \frac{p_0 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{R_0}{R} \left( \frac{1}{R} + \frac{i\omega}{v_P} \right)}{\left( \omega_{0P}^2 - \omega^2 \right) + 2i\omega h_P} \cdot \exp(i\omega \tau) = \mathbf{1}_R \cdot \overset{\vee}{\mathbf{u}}_{P0} \cdot \exp(i\omega \tau) \quad (9.38)$$

или, вводя обозначение

$$\overset{\vee}{f}(\tau) = \frac{p_0 \cdot \exp(i\omega \tau)}{\left( \omega_{0P}^2 - \omega^2 \right) + 2i\omega h_P}, \quad (9.39)$$

запишем (9.38) в виде:

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{R_0}{\rho} \cdot \left[ \frac{1}{R} \cdot \overset{\vee}{f}'(\tau) - \frac{1}{R^2} \cdot \overset{\vee}{f}(\tau) \right]. \quad (9.40)$$

Поле смещений, создаваемое гармонически меняющимся сферическим источником, определяемое формулой (9.40), характеризуют те же основные черты, что и рассматривавшееся ранее поле в общем случае (9.30). Это поле обладает сферической симметрией, смещения частиц среды происходят в

радиальном направлении. Комплексная амплитуда смещения  $\overset{\vee}{\mathbf{u}}_{P0}$ , как следует из (9.38), зависит от амплитуды давления  $p_0$ , приложенного к поверхности полости, относительного удаления  $R/R_0$  точки наблюдения от полости, соотношения, между частотой колебаний  $\omega$  и параметрами  $\omega_{0P}$  и  $h_P$ , определяемого функцией

$$M_P(\omega) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{v_P}}{\left[ (\omega_{0P}^2 - \omega^2) + 2i\omega h_P \right]}. \quad (9.41)$$

Функцию  $M_P(\omega)$  называют комплексной частотной характеристикой очага продольных волн ([Гурвич, 1970], [Гурвич, Боганик, 1980]). Пользуясь (9.41), выражение (9.38), определяющее поле смещений, можем записать в следующем виде:

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{R_0 \cdot p_0}{R} \cdot M_P(\omega) \cdot \exp(i\omega\tau). \quad (9.42)$$

На практике (в сейсморазведке) обычно приходится сталкиваться с возбуждением более сложного вида, чем гармоническое. Чаще всего давление  $p(t)$  представляет собой импульсную функцию, т. е. функцию, отличную от нуля в течение ограниченного промежутка времени. В этом случае задачу для импульсной функции возбуждения, как отмечалось выше, можно свести к рассмотренному случаю для гармонического источника, представив импульс в виде интеграла Фурье (см. раздел IX § 6 главы шестой).

Как известно, любая функция  $f(t)$ , описывающая реальные физические явления, удовлетворяет условиям Дирихле и может быть представлена в виде интеграла Фурье в комплексной форме, т. е. разложена на бесконечно большое число бесконечно малых гармонических составляющих:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t) d\omega, \quad (9.43)$$

где  $S(\omega)$  – комплексная функция, определяющая спектральную плотность всех гармонических составляющих интеграла Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \exp(-i \cdot \omega t) dt = A(\omega) \cdot \exp[-i\varphi(\omega)]. \quad (9.44)$$

Здесь  $A(\omega)$  – амплитудный частотный спектр;  $\varphi(\omega)$  – фазовый частотный спектр.

Допустим, что  $p(t)$  – импульсная функция возбуждения, имеющая комплексный спектр  $S(\omega)$ . Тогда вместо (9.42) поле смещений будет определять зависимость

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R_0}{R} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} M_P(\omega) \cdot S(\omega) \cdot \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad (9.45)$$

а комплексный спектр смещения – формула

$$S_P(\omega, R) = \frac{R_0}{R} \cdot M_P(\omega) \cdot S(\omega) \cdot \exp\left(-i\omega \cdot \frac{R - R_0}{v_P}\right). \quad (9.46)$$

Поле смещений при произвольной импульсной функции возбуждения  $p(t)$  на основе принципа суперпозиции с учётом формулы (9.38) можно записать также в виде (9.40), т. е.

$$\check{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{R_0}{\rho} \cdot \left[ \frac{1}{R \cdot v_P} \cdot \check{f}'(\tau) + \frac{1}{R^2} \cdot \check{f}(\tau) \right], \quad (9.47)$$

где

$$\check{f}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega) \cdot \exp(i\omega\tau)}{(\omega_{0P}^2 - \omega^2) + 2i\omega h_P} d\omega.$$

Таким образом, при импульсном возбуждении сферического источника продольных волн, как и в рассмотренном ранее случае, смещения направлены радиально и на одинаковых расстояниях от источника одинаковы по величине.

Обсудим некоторые особенности распространения сферической продольной волны в однородной среде. Как уже отмечалось выше, характер поля смещений зависит от расстояния до источника. Вдали от него, т. е. при  $(1/R) \gg (1/R^2)$ , поле смещений будет определять более медленно убывающий член в (9.40). В этом случае выражение (9.47) можно записать в виде:

$$\check{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{R_0}{\rho \cdot v_P \cdot R} \cdot \check{f}'(\tau). \quad (9.48)$$

Допустим, что источник действует в течение ограниченного отрезка времени  $\delta t$ , начиная с момента  $t=0$ . В момент времени  $t \gg \delta t$  возмущения среды будут наблюдаться в пределах сферического слоя

$$R_{\text{нар}} = v_P \cdot t \geq R \geq v_P \cdot (t - \delta t) = R_{\text{внутр}}. \quad (9.49).$$

Всё пространство при этом разделено на три области: внутреннюю сферическую область, ограниченную радиусом  $R_{\text{внутр}}$ , в которой возмущения уже закончились, сферический слой толщиной  $\delta R = v_P \cdot \delta t$ , в котором происходят возмущения, и наружную область, лежащую за сферической поверхностью радиуса  $R_{\text{нар}}$ , ещё не затронутую возмущениями. Поверхность, ограничивающая снаружи слой, в котором происходят возмущения, называется *передним фронтом*, или просто *фронтом волны*; поверхность, ограничивающая этот слой изнутри, называется *задним фронтом*, или *тылом волны*. Оба фронта распространяются в среде с одинаковой скоростью  $v_P$ . Линии, ортогональные фронтам волны, называют *лучами*. В данном случае это радиальные прямые, исходящие из центра сферического источника.

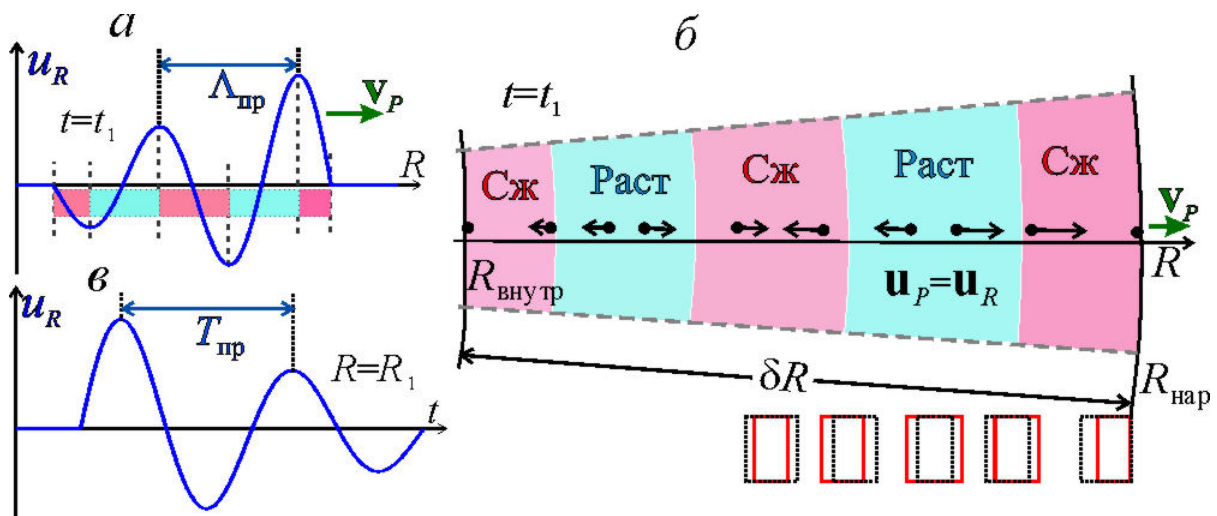
Как следует из формулы (9.48), смещения частиц среды в определённый момент времени  $t$  вдоль какого-либо луча зависят от вида функции  $f'(\tau)$  и отношения  $R_0/R$ . Так как в пределах участка  $\delta R$ , где существуют возмущения, при  $R \gg \delta R$ , отношение  $R_0/R$  практически сохраняется постоянным, характер смещений зависит только от функции  $f'(\tau)$ . Непосредственные вычисления показывают, что распределение смещений вдоль луча для фиксированного

момента времени  $t$  при импульсном возбуждении (так называемый профиль волны или пространственная волна) имеет вид, близкий к изображенному на [рис. 9.2, а](#).

Таким образом, в определённый момент времени колебания, существующие в пределах ограниченного слоя  $\delta R$ , представляют собой чередование вдоль каждого луча имеющих противоположные направления смещений, создающих зоны растяжения и сжатия ([рис. 9.2, б](#)). С течением времени этот цуг колебаний без существенного изменения своей формы и с некоторым уменьшением амплитуды смещений всё больше удаляется от источника.

То, как связаны деформации сжатия - растяжения с зависимостью  $u_R(R)$ , показано на [рис. 9.2, б](#), где изображены сечения плоскостью рисунка элементов объёма упругой среды, имевших до прохождения волны форму прямоугольников (пунктирные линии), и изменивших свои размеры или положение при прохождении продольной волны.

График смещения частиц среды, находящихся на расстоянии  $R=R_1$  от источника, в зависимости от времени показан на [рис. 9.2, в](#). Этот график колебаний – временная волна – является обращённым графиком пространственной волны. См. также [рис. 6.6](#) в главе шестой.



**Рис. 9.2.**

Распространение сферической продольной волны

Расстояние между "горбами" или "впадинами" в пространственной волне называют видимой или преобладающей длиной волны  $\Lambda_{\text{пр}}$ , во временной волне промежуток времени между соседними максимумами, либо соседними минимумами называют видимым или преобладающим периодом колебаний  $T_{\text{пр}}$ . Эти две величины связаны между собой равенством

$$T_{\text{пр}} = \Lambda_{\text{пр}} / v_P. \quad (9.50)$$

Можно, очевидно, говорить и о преобладающей частоте  $f_{\text{пр}} = 1/T_{\text{пр}}$  и круговой частоте  $\omega_{\text{пр}} = 2\pi \cdot f_{\text{пр}}$ . Подобно случаю гармонических электромагнитных колебаний здесь можно ввести волновое число  $k$ , где (в случае абсолютно упругой среды, в которой нет поглощения)  $k$  – действительное



число, (*численно*) равное числу длин волн, укладываемое на отрезке  $2\pi$  метров, и

$$k=2\pi/\Lambda_{\text{пр}}=\omega_{\text{пр}}/v_P. \quad (9.51)$$

Фаза упругих колебаний меняется со временем или с изменением расстояния от источника. В пространстве поверхности одинаковых фаз (волновые поверхности) в случае сферического источника представляют собой концентрические сферы с центрами, совпадающими с центром источника.

Выше обсуждались основные особенности распространения сферической продольной волны на большом расстоянии от источника. Представляет интерес оценить более точно, при каких условиях справедлива асимптотическая формула (9.48).

Из (9.38) и (9.40) следует, что условие  $1/(R \cdot v_P) \cdot f' \gg (1/R^2) \cdot f$  эквивалентно условию  $(1/R) \ll (\omega_{\text{пр}}/v_P)$  (дальняя зона). Принимая во внимание выражение (9.51), заключаем, что искомое расстояние должно удовлетворять условию

$$R \gg \frac{\Lambda_{\text{пр}}}{2\pi}. \quad (9.52)$$

Таким образом, расстояние, на котором сферическая волна приобретает вид, близкий к тому, который описывает выражение (9.48), приблизительно равно длине волны. В непосредственной близости от источника (ближняя зона) смещения частиц среды определяет слагаемое в правой части (9.47) с множителем  $1/R^2$ . Форма колебаний зависит здесь от функции  $f(\tau)$ , а, следовательно, отличается от рассмотренного выше случая (при  $R > \Lambda_{\text{пр}}$ ), когда эту форму определяла функция  $f'(\tau)$ . В области, переходной от малых к большим расстояниям (промежуточная зона), форма колебаний зависит от обеих функций. Таким образом, можно заключить, что в пределах сферы с радиусом  $R$  порядка  $\Lambda_{\text{пр}}$ , происходит значительное изменение формы колебаний. За пределами этой области (при  $R > \Lambda_{\text{пр}}$ ) форма колебаний остаётся практически постоянной. Численные расчёты подтверждают этот вывод.

## II. Сферические поперечные волны

Рассмотрим теперь сферическую поперечную волну, возбуждаемую сферическим источником вращения. Допустим, что к поверхности сферической полости с радиусом  $R_0$  и с центром в начале  $O$  сферической системы координат  $R, \theta, \varphi$  (см. рис. В.10 в разделе "Введение" в части I), находящейся в однородной изотропной упругой среде, приложены касательные силы, вызывающие повороты этой поверхности как единого целого относительно полярной оси сферических координат и оси  $Z$  цилиндрических координат (рис. 9.3, а). Силы

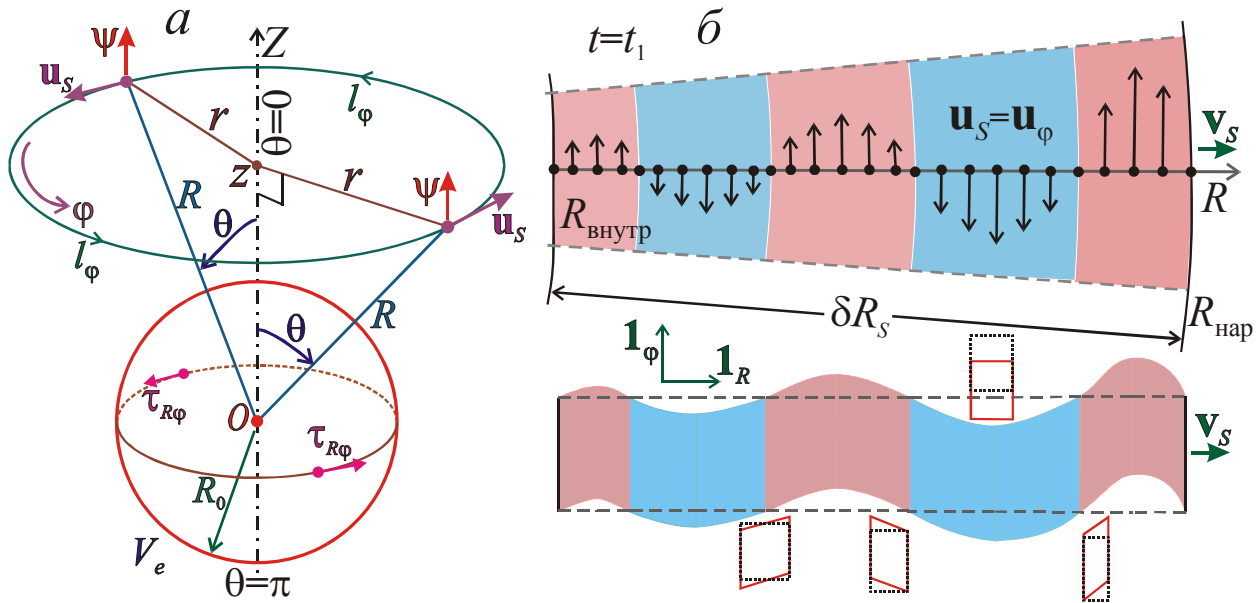


Рис. 9.3.

Сферическая поперечная волна

направлены по касательным к координатным линиям  $l_\varphi$ . В любой точке поверхности сферы такая сила, отнесённая к площадке, на которой она действует, это – касательное напряжение. Будем полагать, что ненулевую компоненту напряжения  $\tau_{R\varphi}$  определяет следующее выражение:

$$\tau_{R\varphi} = \tau(t) \cdot \sin \theta. \quad (9.53)$$

Повороты сферической поверхности вызывают возмущение, распространяющееся в окружающей среде в виде поперечной волны.

Допустим, что источник начал "действовать" в момент  $t=0$ , т. е.

$$\text{при } t < 0 \quad \tau_{R\varphi} = 0. \quad (9.54)$$

Условимся также, что до момента  $t=0$  возмущения в среде отсутствовали, т. е. выполняются начальные условия вида (9.19).

В соответствии с вихревым характером действующих сил смещения в точке  $a$  в момент времени  $t$  могут быть выражены через векторный потенциал  $\psi$  в соответствии с формулой (9.5):

$$\mathbf{u}_s(a, t) = \text{rot } \psi(a, t).$$

Векторный потенциал за пределами сферической поверхности, т. е. при  $R > R_0$ , удовлетворяет уравнению (9.15):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - v_S^2 \cdot \nabla^2 \Psi = 0,$$

где  $v_S^2 = \mu/\rho$ , т. е.

$$v_S = \sqrt{\mu/\rho} \quad (9.54')$$

– скорость распространения поперечных волн в однородной изотропной среде.

Как и источник поле смещений  $\mathbf{u}$  будет иметь нечётную цилиндрическую симметрию относительно полярной оси и оси  $Z$  цилиндрических координат (см. раздел III § 9 в главе первой и [рис. 1.18, б](#)). Оно будет иметь только одну ненулевую:  $\varphi$  – компоненту:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_S(a, t) = \mathbf{u}_\varphi(a, t)$ . Предположим, что в совмещённой системе координат (сферической  $R, \theta, \varphi$  и цилиндрической  $r, \theta, \varphi$  с общим началом  $O$  и осью  $Z$  по полярной оси) векторный потенциал  $\Psi = \mathbf{1}_z \cdot \psi_z(R, t)$ , т. е. в цилиндрической системе координат вектор-потенциал имеет единственную ненулевую компоненту  $\psi_z$ , зависящую лишь от одной пространственной координаты  $R$ . В цилиндрических координатах  $\Psi = \mathbf{1}_z \cdot \psi_z(r, z, t)$ .

Тогда в цилиндрических координатах в соответствии с (9.5), (1.27') для поля смещений  $\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_\varphi = \mathbf{1}_\varphi \cdot u_\varphi = \text{rot } \Psi$  имеем:

$$\mathbf{u}_S = -\mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial r}, \quad (9.55)$$

а согласно (9.15) уравнение для  $z$ -компоненты векторного потенциала

$$\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} - v_S^2 \cdot \nabla^2 \psi_z = 0. \quad (9.56)$$

Так как при  $\psi_z = \psi_z(R, t)$  в соответствии с (в.23), (1.66"), (9.24), (9.25) лапласиан  $z$ -компоненты вектора  $\Psi$

$$\nabla^2 \psi_z = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 (R \cdot \psi_z)}{\partial R^2} \quad (9.57)$$

из (9.56) для произведения  $R \cdot \psi_z$  получаем (математически идентичное уравнению (9.25) для произведения  $R \cdot \varphi$ ) уравнение струны:

$$\frac{\partial^2 (R \cdot \psi_z)}{\partial t^2} - v_S^2 \cdot \frac{\partial^2 (R \cdot \psi_z)}{\partial R^2} = 0. \quad (9.58)$$

В соответствии с (9.29) для расходящейся сферической волны решение этого уравнения:

$$\psi_z(R, t) = \frac{1}{R} \cdot f\left(t - \frac{R}{v_S}\right). \quad (9.59)$$

Вид функции  $f(t - R/v_S)$  зависит от того, как меняются со временем напряжение  $\tau(t)$  в граничном условии (9.53).

Рассмотрим частный случай, когда касательные силы, приложенные к сферической поверхности  $R = R_0$ , а следовательно, и тангенциальные напряжения  $\tau(t)$  на этой поверхности меняются во времени по гармоническому закону, т. е. (при применении комплексной записи и нулевой начальной фазе

напряжения  $\tau$ ) из (9.53) получаем:

$$\overset{\vee}{\tau}(t) = \tau_0 \cdot \sin \theta \cdot \exp(i \cdot \omega t). \quad (9.60)$$

Решение уравнения (9.59):

$$\overset{\vee}{\psi}_z(R, t) = \frac{C \cdot \exp[i \omega \cdot (t - R/v_S)]}{R}, \quad (9.61)$$

где  $C$  – постоянная, не зависящая от  $t$  и  $R$ .

Для определения множителя  $C$  в (9.61) воспользуемся граничным условием на поверхности полости, где в соответствии с (8.67) напряжение связано с деформацией следующим образом:

$$\text{при } R=R_0 \quad \tau_{R\varphi} = 2 \cdot \mu \cdot \gamma_{R\varphi}. \quad (9.62)$$

В соответствии с (8.41) при  $\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_\varphi$  можем выразить деформацию  $\gamma_{R\varphi}$  через смещения так:

$$\gamma_{R\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R} \right). \quad (9.62')$$

Согласно (9.55) в цилиндрических координатах при  $\psi = \mathbf{1}_z \cdot \psi_z$  имеем  $u_\varphi = -\partial \psi_z / \partial r$ . Тогда в сферической системе координат (см. [рис. 9.3, а](#))

$$u_\varphi = -\frac{\partial \psi_z}{\partial R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} R = -\frac{\partial \psi_z}{\partial R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{r^2 + z^2} = -\frac{\partial \psi_z}{\partial R} \cdot \frac{r}{R} = -\frac{\partial \psi_z}{\partial R} \cdot \sin \theta.$$

Подставляя это выражение для ненулевой компоненты  $u_\varphi$  поля смещений в правую часть (9.62'), получаем

$$\gamma_{R\varphi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial R} \right) \cdot \sin \theta. \quad (9.63)$$

В результате, пользуясь (9.58), (9.60), (9.63), условие (9.62) на поверхности полости можем записать в виде:

$$\text{при } R=R_0 \quad \tau_0 \cdot \sin \theta \cdot \exp(i \cdot \omega t) = -\mu \cdot \left( \frac{\partial^2 \overset{\vee}{\psi}_z}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\psi}_z}{\partial R} \right) \cdot \sin \theta. \quad (9.64)$$

Подставляя в (9.64) выражение (9.61) для  $\overset{\vee}{\psi}_z$ , сокращая множитель  $\sin \theta$  и дифференцируя, находим выражение для  $C$

$$C = \frac{\tau_0 \cdot R_0 \cdot v_S^2 \cdot \exp(i \omega R_0 / v_S)}{\mu \cdot \left( \frac{3 \cdot v_S^2}{R_0^2} - \omega^2 + \frac{3i \omega \cdot v_S}{R_0} \right)}. \quad (9.65)$$

Отсюда в соответствии с (9.61) во внешней области  $V_e$ , при  $R > R_0$ , имеем

$$\overset{\vee}{\psi}_z(R, t) = \frac{\tau_0 \cdot R_0 \cdot v_S^2}{\mu \cdot (\omega_{0S}^2 - \omega^2 + 2i \omega \cdot h_S)} \cdot \frac{\exp(i \omega \tau)}{R}, \quad (9.66)$$

где

$$\omega_{0S} = \sqrt{3} \cdot \frac{v_S}{R_0}; \quad h_S = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_S}{R_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega_{0S}; \quad \tau = t - \frac{R - R_0}{v_S}.$$

Переходя к смещениям, на основании (9.57) и учитывая, что  $v_S^2 = \mu/\rho$ , получаем

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_S = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{R_0}{R} \cdot \frac{\tau_0 \cdot \left( \frac{i\omega}{v_S} + \frac{1}{R} \right)}{\rho \cdot (\omega_{0S}^2 - \omega^2 + 2i\omega \cdot h_S)} \cdot \sin \theta \cdot \exp(i\omega\tau) = \mathbf{1}_\varphi \cdot \overset{\vee}{u}_{S0} \cdot \exp(i\omega\tau). \quad (9.67)$$

Введя обозначение

$$\overset{\vee}{f}(\tau) = \frac{\tau_0 \cdot \sin \theta \cdot \exp(i\omega\tau)}{\omega_{0S}^2 - \omega^2 + 2i\omega \cdot h_S}, \quad (9.68)$$

запишем (9.67) в следующем виде:

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_S = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{R_0}{R} \cdot \left[ \frac{1}{Rv_S} \cdot \overset{\vee}{f}'(\tau) + \frac{1}{R^2} \cdot \overset{\vee}{f}(\tau) \right]. \quad (9.69)$$

Как и в рассмотренном в разделе I случае продольной сферической волны, здесь можно ввести представление о комплексной частотной характеристике очага поперечных волн в виде

$$M_S(\omega) = \frac{\frac{1}{R} + \frac{i\omega}{v_S}}{\rho \cdot \left[ (\omega_{0S}^2 - \omega^2) + 2i\omega h_S \right]}. \quad (9.70)$$

Тогда поле смещений будет определять выражение

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_S = \mathbf{1}_\varphi \cdot \frac{R_0 \cdot \tau_0}{R} \cdot M_S(\omega) \cdot \sin \theta \cdot \exp(i\omega\tau). \quad (9.71)$$

Сходство выражений (9.38) и (9.67), (9.42) и (9.71) говорит об общности пространственно-временной картины распространения поперечных и продольных волн, возбуждаемых сферическим источником.

При импульсном характере источника распространение поперечной волны и распределение смещений в пространстве будут определять зависимости, подобные формулам (9.45), (9.47), отличающиеся от последних скоростью распространения волны и характеристиками сферического очага –  $\omega_0$  и  $h$ . При импульсном возбуждении поперечная волна существует в сферическом слое толщиной  $\delta R_S$ , зависящей от времени действия источника и скорости распространения поперечной волны

$$\delta R_S = v_S \cdot \delta t. \quad (9.72)$$

Таким образом, сферический источник вращения, как при гармоническом, так и при импульсном возбуждении создает поперечные колебания, которые распространяются в окружающем пространстве в виде сферической волны. Это означает, что поверхности равных фаз этой волны представляют собой сферы. Точки, лежащие на поверхности сферы определённого радиуса  $R$ , совершают поворот как единое целое вокруг оси  $Z$  (см. [рис. 9.3, а](#)) на некоторый угол  $\Delta\varphi$ . Для фиксированного момента времени смещения точек, лежащих на одной

прямой, исходящей из центра  $O$  очага, на разных расстояниях от его центра, будут различными по величине и направлению (рис. 9.3, б). В пространстве и во времени наблюдаем волновую картину, для характеристики которой, как и для продольной волны, можно пользоваться представлениями о преобладающей длине волны, преобладающем периоде колебаний, волновом числе и т. п. Главное отличие поперечной волны от продольной волны заключается в характере деформации упругой среды и скорости распространения колебаний. Смещения в продольной волне совершаются в направлениях коллинеарных направлению распространения волны и происходят деформации сжатия и растяжения, в поперечной волне при смещениях, ортогональных направлению распространения  $\mathbf{v}_S$  и разных по величине в соседних точках по направлению  $\mathbf{v}_S$ , наблюдаются деформации сдвига. Характер сдвиговых деформаций показан на рис. 9.3, б, где изображены сечения плоскостью рисунка элементов объёма упругой среды, имевших до прохождения волны форму прямоугольников (пунктирные линии), и изменивших свою форму и положение при прохождении поперечной волны.

Отметим, что в жидкостях и газах, где отсутствует жёсткое сцепление частиц среды, сдвиговые деформации отсутствуют. Поэтому *поперечных волн в таких средах не существует.*

### III. Плоские однородные и неоднородные волны

В теории распространения упругих колебаний широко пользуются представлением о плоских волнах. Под плоской волной понимают возмущение, поверхности равных фаз которого представляют собой плоскости, ортогональные к направлению распространения волны. Плоская волна является математической абстракцией, поскольку не существует реальных источников для её возбуждения. Однако на достаточно больших расстояниях от источника сферическую волну в пределах ограниченной области можно рассматривать как плоскую. Условие удаления на большое расстояние является относительным. Чем меньше площадь участка сферической поверхности, тем меньше расстояние, на котором его может считать плоским с заданной погрешностью. В принципе волну любого типа можно представить в виде суммы плоских волн.

У плоской волны нет геометрического расхождения, и амплитуда смещения не меняется со временем (при отсутствии поглощения – в абсолютно-упругой среде). Профиль волны сохраняется постоянным.

Получим уравнения для плоских волн из общего уравнения распространения упругих колебаний (9.3). Будем рассматривать область вне действия внешних объёмных сил, т. е. положим  $\mathbf{F}=0$ . Пусть направление распространения плоской волны совпадает с осью  $Z$ . В этом случае вектор смещения  $\mathbf{u}$  и его компоненты  $u$ ,  $v$ ,  $w$  не зависят от координат  $x$  и  $y$  и, следовательно,

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \text{grad } \theta = \mathbf{1}_z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{1}_x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mathbf{1}_y \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mathbf{1}_z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Тогда векторное уравнение (9.3) можно записать в виде совокупности трёх скалярных уравнений

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (9.73)$$

или, пользуясь обозначениями  $v_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $v_S = \sqrt{\mu/\rho}$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_S^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v_S^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v_P^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (9.74)$$

Уравнения (9.74) представляют, собой известные одномерные волновые уравнения (уравнения струны, см. уравнение (6.24) в главе шестой). В соответствии с (9.74) возможно существование двух типов плоских воли. Третье уравнение описывает плоскую продольную волну, которая распространяется вдоль оси  $Z$  со скоростью  $v_P$ . Смещения происходят здесь в направлениях коллинеарных оси  $Z$ . Первое и второе уравнения (9.74)<sub>1,2</sub> характеризует поперечную волну, распространяющуюся также вдоль оси  $Z$ , но со скоростью  $v_S$ . Смещения происходят в этом случае в плоскостях  $z=\text{const}$ , ортогональных направлению распространения волны.

Решения уравнений (9.74) подобны решению (9.26). Например, решение уравнения (9.74)<sub>3</sub>:

$$w = f_1\left(t - \frac{z}{v_P}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v_P}\right). \quad (9.75)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  функции произвольного вида;  $v_P$  – скорость распространения продольной волны.

Второе слагаемое в правой части (9.75) соответствует плоской волне, распространяющейся в направлении антипараллельном оси  $Z$ . Если нас интересует волна, распространяющаяся в направлении оси  $Z$ , полагаем  $f_2=0$ . В результате выражения, определяющие поле смещений плоской, продольной и поперечной волн, распространяющихся вдоль оси  $Z$ , имеют вид

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_z \cdot f_P\left(t - \frac{z}{v_P}\right), \quad \mathbf{u}_S = \mathbf{1}_t \cdot f_S\left(t - \frac{z}{v_S}\right). \quad (9.76)$$

где  $\mathbf{1}_t$  – единичный вектор, лежащий в плоскости, ортогональной оси  $Z$  и определяющий направления смещений в поперечной волне. Конкретный вид функций  $f_P$  и  $f_S$  определяет то, каков характер возбуждения.

В рассматриваемых плоских волнах в каждой из плоскостей  $z=\text{const}$ , ортогональных направлению распространения, колебания имеют одинаковую фазу и амплитуду, т. е. поверхности равных фаз и амплитуд в такой плоскости совпадают. Такие волны называются однородными плоскими волнами.

Иногда приходится рассматривать плоскую волну, распространяющуюся вдоль направления  $\mathbf{1}_R$ , составляющего углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  с координатными осями  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Поверхности равных фаз плоской волны ортогональны направлению  $\mathbf{1}_R$  и одинаковы в плоскости  $R=\text{const}$  (рис. 9.4, а).

Тогда выражение (9.76)<sub>1</sub> для случая плоской продольной волны можно записать в виде:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_R \cdot f_P \left( t - \frac{R}{v_P} \right). \quad (9.77)$$

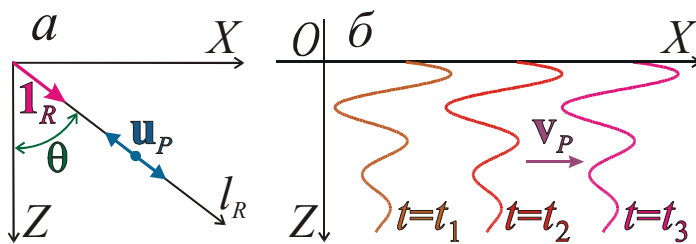
Обозначим  $n_x, n_y, n_z$  направляющие косинусы для  $\mathbf{1}_R$ . Тогда из (9.77) получаем:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_R \cdot f_P \left( t - \frac{n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z}{v_P} \right). \quad (9.78)$$

при этом должно выполняться уже упоминавшееся условие (8.17):

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Аналогичным образом можно записать уравнение для плоской поперечной волны.



**Рис. 9.4.**

Неоднородная плоская волна

Рассмотрим детальнее случай, когда плоская волна меняется во времени по гармоническому закону. Выражение для гармонической плоской продольной волны, распространяющейся вдоль произвольного направления  $\mathbf{1}_R$ , имеет вид

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot u_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right] = \mathbf{1}_R \cdot u_0 \cdot \exp(-i \cdot kR) \cdot \exp(i \cdot \omega t) \quad (9.79)$$

или

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot u_0 \cdot \exp \left[ -i \cdot k \cdot (n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z) \right] \cdot \exp(i \cdot \omega t), \quad (9.79')$$

где  $u_0$  – амплитуда волны;  $k$  – волновое число.

Пользуясь интегралом Фурье, любую плоскую однородную волну можно представить в виде совокупности гармонических плоских волн. Для рассматриваемой здесь продольной волны имеем

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \exp \left[ i \cdot \omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right] d\omega, \quad (9.80)$$

где  $S(\omega)$  – спектральная плотность.

При решении ряда задач, связанных с распространением упругих колебаний, наряду с однородными плоскими волнами пользуются понятием о неоднородной плоской волне. Его можно ввести на основании формального допущения о том, что направляющие косинусы являются не вещественными, а комплексными числами:

$$n_x = n_x' + n_x'', \quad n_y = n_y' + n_y'', \quad n_z = n_z' + n_z''. \quad (9.81)$$

Если при этом потребовать соблюдения условия (8.17), то выражение (9.79) по-прежнему будет решением волнового уравнения (9.74), хотя в соответствии с (9.81) примет вид



$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = & \mathbf{1}_R \cdot u_0 \cdot \exp [-i k \cdot (n_x' \cdot x + n_y' \cdot y + n_z' \cdot z)] \times \\ & \times \exp [k \cdot (n_x'' \cdot x + n_y'' \cdot y + n_z'' \cdot z)] \cdot \exp (i \omega t). \end{aligned} \quad (9.82)$$

Как следует из (9.82), поверхности равных фаз в этой волне представляют собой плоскости, определяемые уравнением

$$n_x' \cdot x + n_y' \cdot y + n_z' \cdot z = \text{const}, \quad (9.83)$$

а поверхности одинаковых амплитуд – плоскости

$$n_x'' \cdot x + n_y'' \cdot y + n_z'' \cdot z = \text{const}. \quad (9.84)$$

Плоскости одинаковых фаз (9.83) и одинаковых амплитуд (9.84) – взаимно ортогональны, так как, подставляя (9.81) в (8.17) и приравнявая мнимые части правой и левой частей выражения, получаем:

$$n_x' \cdot n_x'' + n_y' \cdot n_y'' + n_z' \cdot n_z'' = 0.$$

Это равенство выражает условие ортогональности плоскостей (9.83) и (9.84). Волну вида (9.82) называют неоднородной плоской волной, так как поверхности одинаковых фаз и поверхности одинаковых амплитуд здесь являются плоскостями. Эта волна распространяется в направлении  $l'$  с направляющими косинусами  $n_x'$ ,  $n_y'$ ,  $n_z'$ , а амплитуда её изменяется в одном из ортогональных  $l'$  направлений  $l''$ ; вдоль синфазной плоскости. Формально возможное решение волнового уравнения, имеющее вид (9.82), соответствует, как будет показано ниже, реальным физическим явлениям.

При рассмотрении плоских волн систему координат можно выбрать таким образом, чтобы вектор, совпадающий с направлением  $l'$  распространения волны, лежал в плоскости  $XOZ$ . Тогда  $n_y = 0$ ,  $n_y' = 0$ ,  $n_y'' = 0$  и направление распространения волны можно характеризовать одним углом  $\theta$ , отсчитываемым, например, от оси  $Z$  (см. [рис. 9.4, а](#)). В этом случае  $n_x = \sin \theta$  и  $n_z = \cos \theta$ , и уравнение (9.79) принимает вид

$$\overset{\vee}{u} = u_0 \cdot \exp [-i k \cdot (x \cdot \sin \theta + z \cdot \cos \theta)] \cdot \exp (i \omega t). \quad (9.85)$$

В случае неоднородной волны угол  $\theta$  следует считать комплексной величиной:  $\theta = \theta' + i \cdot \theta''$ .

Функции  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  при комплексной величине угла  $\theta$  определяют выражения:

$$\sin \theta = \sin \theta' \cdot \text{ch } \theta'' + i \cdot \cos \theta' \cdot \text{sh } \theta'', \quad \cos \theta = \cos \theta' \cdot \text{ch } \theta'' - i \cdot \sin \theta' \cdot \text{sh } \theta'', \quad (9.86)$$

где  $\text{sh } \theta''$  – гиперболический синус, а  $\text{ch } \theta''$  – гиперболический косинус:

$$\text{sh } \theta'' = (\exp \theta'' - \exp(-\theta''))/2, \quad \text{ch } \theta'' = (\exp \theta'' + \exp(-\theta''))/2.$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда  $\theta'' = \pi/2$ . Из (9.86) получаем

$$\sin \theta = \text{ch } \theta'', \quad \cos \theta = -i \cdot \text{sh } \theta''.$$

Тогда уравнение (9.85) можно записать в виде

$$\overset{\vee}{u} = u_0 \cdot \exp (-k \cdot \text{sh } \theta'' \cdot z) \cdot \exp (-i \cdot k \cdot \text{ch } \theta'' \cdot x) \cdot \exp (i \omega t). \quad (9.87)$$

Выражение (9.87) описывает *неоднородную плоскую волну*, которая распространяется в направлении оси  $X$  с фазовой постоянной  $k \cdot \text{ch } \theta''$  и экспоненциально убывает в направлении оси  $Z$  с коэффициентом затухания  $k \cdot \text{sh } \theta''$  (рис. 9.4, б). Неоднородные плоские волны возникают при явлениях отражения и преломления упругих колебаний на границах сред с разными упругими свойствами (см. § 4).

Этим понятием широко пользуются при необходимости представления волн различного типа, в частности сферических, в виде суперпозиции плоских волн. Подобный приём облегчает решение ряда задач, особенно при различии в симметрии волны и границ в среде.

#### IV. Одновременное возбуждение и распространение продольных и поперечных волн. Сосредоточенный источник

Рассмотрим случай, когда в пределах некоторой локальной области  $V$ , окружённой неограниченной однородной упругой средой, действуют массовые силы  $\mathbf{F}$ , создающие поступательное движение частиц среды. Подобный источник, как будет показано ниже, одновременно генерирует продольные и поперечные упругие волны. Воспользуемся совмещённой системой координат  $r, \varphi, z$  и  $R, \theta, \varphi$  с общим началом  $O$  и полярной осью по оси  $Z$ , направленной вертикально вниз.

Примем допущение, что заданные массовые силы во всех точках области  $V$  имеют одинаковую величину и направление, коллинеарное оси  $Z$ . Во времени они изменяются по гармоническому закону:  $\mathbf{F} = \mathbf{1}_z \cdot F_z$ ,  $F_z = F_{z0} \cdot \cos(\omega t)$ , а в комплексной форме:  $\mathbf{F} = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{F}_z$ ,  $\overset{\vee}{F}_z = F_{z0} \cdot \exp(i \cdot \omega t)$ . Определим поле смещений  $\mathbf{u}$ . Будем искать выражение для  $\mathbf{u}$  на таких расстояниях от источника, чтобы форма источника была не существенна и можно было рассматривать его, как источник сферических волн.

Запишем уравнения распространения упругих колебаний в форме (9.16), (9.17):

$$\frac{\partial^2 \text{div } \mathbf{u}}{\partial t^2} - v_P^2 \cdot \nabla^2 \text{div } \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{F}, \quad \frac{\partial^2 \text{rot } \mathbf{u}}{\partial t^2} - v_S^2 \cdot \nabla^2 \text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{F}.$$

Так как  $\overset{\vee}{\mathbf{F}} = \mathbf{1}_z \cdot F_{z0} \cdot \exp(i \omega t)$ , то

$$\text{div } \overset{\vee}{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_{z0}}{\partial z} \cdot \exp(i \cdot \omega t). \quad (9.88)$$

Составляющие  $\text{rot } \overset{\vee}{\mathbf{F}}$  в декартовой системе координат будут соответственно равны

$$\text{rot}_x \overset{\vee}{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_{z0}}{\partial y} \cdot \exp(i \cdot \omega t), \quad \text{rot}_y \overset{\vee}{\mathbf{F}} = -\frac{\partial F_{z0}}{\partial x} \cdot \exp(i \cdot \omega t), \quad \text{rot}_z \overset{\vee}{\mathbf{F}} = 0. \quad (9.89)$$

Как будет показано в § 3, решение неоднородного волнового уравнения для сферической волны в случае, когда источник занимает область  $V$ , имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot v^2} \cdot \int_V \frac{\Phi(t - R/v)}{R} dV, \quad (9.90)$$

где  $\Phi$  – функция, характеризующая возмущающую силу.

Решения неоднородных уравнений (9.16) и (9.17) будем искать в виде (9.90):

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot \int_V \frac{\partial F_{z0}}{\partial z_q} \cdot \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R_{qa}}{v_P} \right) \right]}{R_{qa}} dV, \quad (9.91)_1$$

$$\operatorname{rot}_x \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot \int_V \frac{\partial F_{z0}}{\partial y_q} \cdot \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R_{qa}}{v_S} \right) \right]}{R_{qa}} dV, \quad (9.91)_2$$

$$\operatorname{rot}_y \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{-1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot \int_V \frac{\partial F_{z0}}{\partial x_q} \cdot \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R_{qa}}{v_S} \right) \right]}{R_{qa}} dV, \quad (9.91)_3$$

где  $q$  – точка в области  $V$  с координатами  $x_q, y_q, z_q$ , центр элементарного объёма  $dV$ ;  $a$  – точка наблюдения с координатами  $x, y, z$ ;  $R_{qa}$  – расстояние между точками  $q$  и  $a$ .

Преобразуем объёмные интегралы (9.91) путём интегрирования по частям. Имея в виду, что  $dV(q) = dx_q \cdot dy_q \cdot dz_q$ , получаем для первого выражения в (9.91):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \check{\mathbf{u}}(a) = & \frac{1}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot \int_{S[V]} F_{z0} \cdot \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R_{qa}}{v_P} \right) \right]}{R_{qa}} dx_q dy_q - \\ & - \frac{1}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot \int_V F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial z_q} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R_{qa}}{v_P} \right) \right]}{R_{qa}} \right\} dV. \end{aligned} \quad (9.92)$$

Так как  $F_z$  на поверхности  $S[V]$   $F_z=0$ , первый интеграл в правой части (9.92) равен нулю. Преобразуя подобным образом второе и третье выражения в (9.91), получаем:

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{-1}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot \int_V F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial z_q} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R_{qa}}{v_P} \right) \right]}{R_{qa}} \right\} dV, \quad (9.93)_1$$

$$\operatorname{rot}_x \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{-1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot \int_V F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial y_q} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R_{qa}}{v_S} \right) \right]}{R_{qa}} \right\} dV, \quad (9.93)_2$$

$$\operatorname{rot}_y \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot \int_V F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_q} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R_{qa}}{v_S} \right) \right]}{R_{qa}} \right\} dV. \quad (9.93)_3$$

Пусть размеры источника, где действуют массовые силы, малы по сравнению с длинами поперечной и продольной волн. Поэтому можно считать, что подынтегральное выражение в пределах области  $V$  изменяется незначительно. Это позволяет заменить интеграл произведением подынтегрального выражения в средней точке  $O$  области на объём  $V$  этой области. Поместим в среднюю точку  $O$  начало координат. Дифференцирование по точке  $q$  заменим дифференцированием по точке  $a$ , т. е. заменим

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \text{ на } -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y_q} \text{ на } -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z_q} \text{ на } -\frac{\partial}{\partial z}$$

так как

$$R_{qa} = \sqrt{(x_q - x)^2 + (y_q - y)^2 + (z_q - z)^2}.$$

Из (9.93) получаем:

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right]}{R} \right\} \cdot V, \quad (9.94)_1$$

$$\operatorname{rot}_x \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_S} \right) \right]}{R} \right\} \cdot V, \quad (9.94)_2$$

$$\operatorname{rot}_y \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{-1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_S} \right) \right]}{R} \right\} \cdot V. \quad (9.94)_3$$

Выразим производные, фигурирующие в (9.94), следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial R} \cdot \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial R} \cdot \frac{y}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial R} \cdot \frac{z}{R}.$$

Тогда (9.94) можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right]}{R} \right\} \cdot \frac{z}{R} \cdot V, \quad (9.95)_1$$

$$\operatorname{rot}_x \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_S} \right) \right]}{R} \right\} \cdot \frac{y}{R} \cdot V, \quad (9.95)_2$$

$$\operatorname{rot}_y \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{-1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot F_{z0} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_S} \right) \right]}{R} \right\} \cdot \frac{x}{R} \cdot V. \quad (9.95)_3$$

Ротор вектора смещения  $\mathbf{u}$  имеет только ортогональную оси  $Z$  компоненту, абсолютная величина которой

$$|\operatorname{rot}_\tau \mathbf{u}| = \sqrt{(\operatorname{rot}_x \mathbf{u})^2 + (\operatorname{rot}_y \mathbf{u})^2}. \quad (9.96)$$

Учитывая, что  $z/R = \cos \theta$  и  $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} = \frac{r}{R} = \sin \theta$ , получаем следующие выражения:

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot F_{z0} \cdot V \cdot \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right]}{R} \right\}, \quad (9.97)_1$$

$$\operatorname{rot}_\tau \check{\mathbf{u}}(a) = \frac{1}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot F_{z0} \cdot V \cdot \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_S} \right) \right]}{R} \right\}. \quad (9.97)_2$$

Прежде, чем перейти к смещениям, получим выражения для  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{u}$  в сферической системе координат. При этом учтём, что из-за осевой симметрии задачи производные по координате  $\varphi$  равны нулю. Кроме того, так как вектор  $\operatorname{rot} \mathbf{u}$  лежит в "горизонтальной" (ортогональной оси  $Z$ ) плоскости, смещения  $\mathbf{u}_S$  должны происходить в "вертикальных" плоскостях и, следовательно,

компонента  $u_\varphi=0$ . Поэтому в соответствии с (1.33"), (1.27")

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{2}{R} \cdot u_R + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \cdot \sin \theta), \\ \operatorname{rot}_\tau \mathbf{u}(a) &= \frac{\partial u_\theta}{\partial R} + \frac{1}{R} \cdot u_\theta - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_R}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (9.98)$$

Можно показать, что при достаточно больших значениях  $R$  в правых частях (9.98)<sub>1</sub>, (9.98)<sub>2</sub> допустимо пренебречь вторыми и третьими членами по сравнению с первыми. Сопоставляя первые члены (9.98) с правыми частями (9.97), получаем выражения для смещений при распространении продольной и поперечной волн

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{F_{z0} \cdot V}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot \frac{\cos \theta}{R} \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right], \quad (9.99)$$

$$\overset{\vee}{\mathbf{u}}_S = -\mathbf{1}_\theta \cdot \frac{F_{z0} \cdot V}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot \frac{\sin \theta}{R} \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_S} \right) \right]. \quad (9.100)$$

Переходя к действительной форме записи, из (9.99), (9.100) получаем:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{F_{z0} \cdot V}{4\pi \cdot v_P^2} \cdot \frac{\cos \theta}{R} \cdot \cos \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right], \quad (9.99')$$

$$\mathbf{u}_S = -\mathbf{1}_\theta \cdot \frac{F_{z0} \cdot V}{4\pi \cdot v_S^2} \cdot \frac{\sin \theta}{R} \cdot \cos \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_S} \right) \right]. \quad (9.100')$$

Вместо массовых сил, действующих в области  $V$ , для удобства расчётов можно рассматривать так называемую сосредоточенную силу  $\mathcal{F}$ , приложенную к определённой точке пространства в пределах области  $V$ . Величину силы будет определять произведение компоненты  $\mathbf{F}_z = \mathbf{1}_z \cdot F_z$  массовой силы на массу, сосредоточенную в объёме  $V$ , т. е.

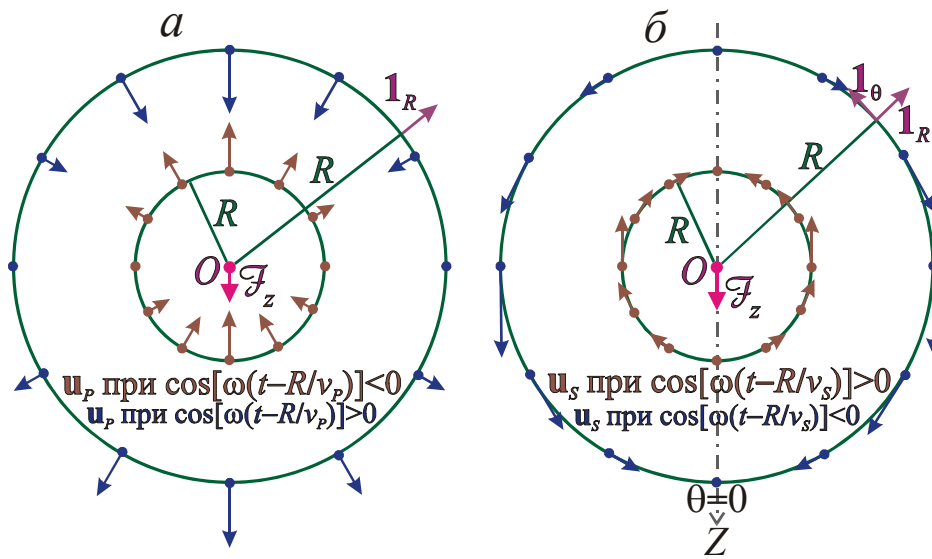
$$\mathcal{F} = \mathbf{1}_z \cdot \mathcal{F}_z, \quad \mathcal{F}_z = F_z \cdot V \cdot \rho = \mathcal{F}_{z0} \cdot \cos(\omega t). \quad (9.101)$$

В пределе, при объёме  $V \rightarrow 0$  и  $F_z \rightarrow \infty$ , компоненту отнесённой к массе ( $V \cdot \rho$ ) силы  $\mathcal{F}_z$  можно считать приложенной к точке. При этом  $\mathcal{F}_z$  будет конечной величиной. Подставляя (9.101) в (9.99') и (9.100'), получаем

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{1}_R \cdot \frac{\mathcal{F}_{z0}}{4\pi \cdot v_P^2 \cdot \rho} \cdot \frac{\cos \theta}{R} \cdot \cos \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_P} \right) \right], \quad (9.102)$$

$$\mathbf{u}_S = -\mathbf{1}_\theta \cdot \frac{\mathcal{F}_{z0}}{4\pi \cdot v_S^2 \cdot \rho} \cdot \frac{\sin \theta}{R} \cdot \cos \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{R}{v_S} \right) \right]. \quad (9.103)$$

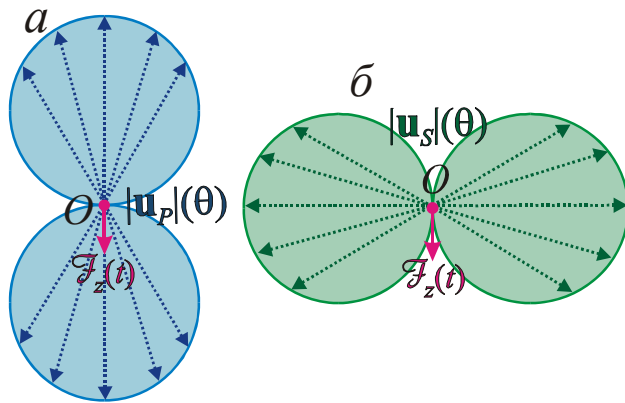
Как следует из формул (9.99') и (9.102), продольная волна, возбуждаемая сосредоточенным источником, является сферической волной, распространяющейся со скоростью  $v_p$ . Смещения  $\mathbf{u}_p = \mathbf{1}_R \cdot \mathbf{u}_R$  происходят вдоль



**Рис. 9.5.**

Смещения, вызванные сосредоточенным источником

координатных линий  $l_R$  и амплитуда смещений зависит от направления (от угла  $\theta$ ). Максимальные смещения  $\mathbf{u}_p$  происходят в направлении действия внешних сил. В экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) они отсутствуют. На рис. 9.5, а



**Рис. 9.6.**

Зависимости модулей  $|\mathbf{u}_p|$  (а) и  $|\mathbf{u}_s|$  (б) от полярного угла  $\theta$

показано распределение смещений  $\mathbf{u}_p$  для сечений плоскостью рисунка двух поверхностей  $R = \text{const}$ . На рис. 9.6, а приведена зависимость  $|\mathbf{u}_p|$  от полярного угла  $\theta$ .

В поперечной волне (см. формулы (9.100') и (9.103)), величина смещения  $\mathbf{u}_s$  убывает с увеличением  $R$  как  $1/R$ . Поперечная волна, возбуждаемая сосредоточенным источником, также является сферической. Она, как и продольная волна,

распространяется в направлениях  $\mathbf{1}_R$ , но со скоростью  $v_s$ . Смещений в поперечной волне происходят в направлениях, ортогональных координатным линиям  $l_R$  (орту  $\mathbf{1}_R$ ). Максимальные смещения  $\mathbf{u}_s$  наблюдаем в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$ . На оси  $Z$  (при  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ ), на которой лежит сила  $\mathbf{F}$ , векторы смещения  $\mathbf{u}_s$  равны нулю (рис. 9.5, б, рис. 9.6, б).

В случае, если сосредоточенный источник действует в течение ограниченного промежутка времени  $\delta t$ , ввиду различия скоростей  $v_p$  и  $v_s$  через некоторое время происходит пространственное разделение продольной и поперечной волн. Продольная волна вследствие большей скорости

«отрывается» от поперечной, опережает её. Отношение скоростей продольных и поперечных волн зависит только от коэффициента Пуассона  $\nu$ . Для абсолютно-упругих сред отношение

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}} > \sqrt{2}. \quad (9.103')$$

У многих твёрдых тел, в частности у горных пород, для этого отношения имеем следующее:  $1.5 \leq (v_P/v_S) \leq 3$ .

Следовательно, при известных скоростях  $v_P$ ,  $v_S$  можно определить коэффициент Пуассона упругой среды. Чем больше отношение  $v_P/v_S$  тем больше коэффициент Пуассона. Ясно, что скорость  $v_P$  всегда больше, чем  $v_S$ . Отсюда – "происхождение" индексов у этих скоростей и соответствующих составляющих поля смещений: "P" – prima (первая), "S" – secunda (вторая). Отметим ещё, что "абсолютно-упругой несжимаемой жидкости" соответствует значение коэффициента Пуассона  $\nu=0.5$ . При таком значении  $\nu$  из (9.103') получаем:  $v_P/v_S \rightarrow \infty$ . Это обусловлено тем, что в жидкости (с конечной скоростью  $v_P$ ) могут распространяться только продольные упругие волны, но не поперечные упругие волны. Поэтому жидкостям формально соответствует скорость  $v_S=0$ .

### § 3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В БЕЗГРАНИЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

#### I. Общее решение волнового уравнения

Рассмотрим общий случай, когда упругие волны в неограниченной однородной среде возбуждает совокупность ряда локальных источников типа расширения, расположенных в точках  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Источники характеризуют функции интенсивности  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ . Кроме того, есть источники, непрерывно распределённые в области  $V$  с интенсивностью источника  $f(t) \cdot dV$ , заключённого в бесконечно малом объёме  $dV$ . (рис. 9.7, а).

В соответствии с принципом суперпозиции потенциал  $\varphi$  поля смещений  $\mathbf{u}_P$  в произвольной точке  $a$ , создаваемый всеми источниками равен сумме потенциалов, создаваемых каждым из источников:

$$\varphi(a, t) = \sum_q \frac{1}{L_{qa}} \cdot f\left(t - \frac{L_{qa}}{v_P}\right) + \int_V \frac{1}{L_{qa}} \cdot f\left(t - \frac{L_{qa}}{v_P}\right) dV, \quad (9.104)$$

где  $L_{qa}$  – расстояние от соответствующего источника, расположенного в точке  $q$  с координатами  $x_q, y_q, z_q$  до точки  $a$  ( $x_a, y_a, z_a$ ):

$$L_{qa} = \sqrt{(x_q - x_a)^2 + (y_q - y_a)^2 + (z_q - z_a)^2}.$$



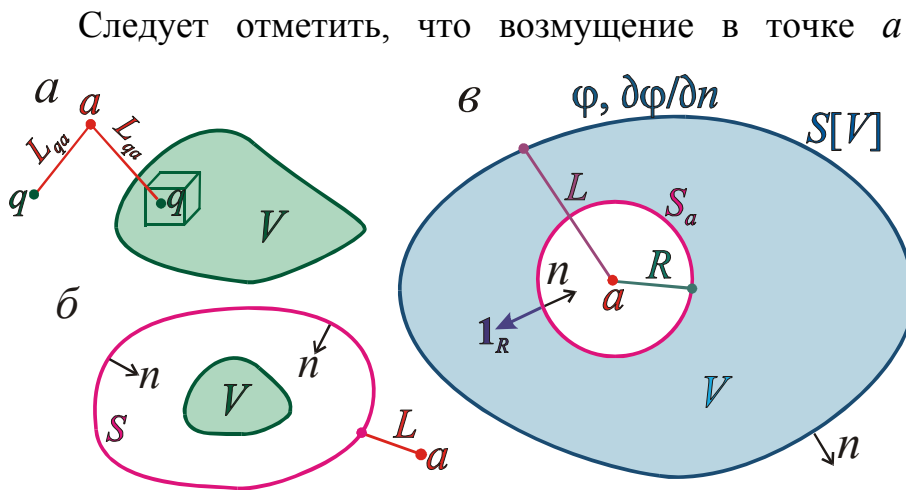


Рис. 9.7.

К упругим волнам произвольных источников в однородной среде

определяют значения функции интенсивности источников в более ранние и различные моменты времени –  $t - L_{qa}/v_p$ . Необходимо разное время, чтобы при данной скорости  $v_p$  возмущение от разнородных

источников достигло точки  $a$ . Для источников более сложного типа по сравнению с рассмотренными выше решение можно построить аналогичным образом.

## II. Формулы Кирхгофа и Пуассона

Рассмотрим задачу определения поля смещения в некоторой части пространства, если известны значения потенциала и его производных на некоторой замкнутой поверхности  $S$ . Эта поверхность может окружать область, где сосредоточены источники, и тогда нас интересует поле смещений в остальной внешней части пространства (рис. 9.7, б) или, наоборот, поле смещений в пределах некоторой области, окруженной поверхностью  $S$ , ограничивающей эту область от внешней части пространства, где находятся источники (рис. 9.7, в). Эта задача в своё время была рассмотрена Г. Кирхгофом.

Рассмотрим случай, когда в области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S[V]$ , надо найти потенциал  $\varphi(a, t)$  поля смещений, создаваемого источниками, находящимися за пределами этой области (см. рис. 9.7, в). На поверхности  $S[V]$  заданы потенциал  $\varphi$  и его нормальная производная  $\partial\varphi/\partial n$  для любого момента времени  $t$ . Искомая функция  $\varphi(a, t)$  должна удовлетворять однородному волновому уравнению (9.14):

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{v_p^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

и краевым условиям на поверхности  $S$  – заданным значениям  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n$  на  $S$ . Для решения задачи выразим искомую функцию через интеграл Фурье (9.43)

$$\varphi(a, t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p(a, \omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t) d\omega, \quad (9.105)$$

где  $p(a, \omega)$  – спектральная плотность, которая зависит не только от частоты, но и от координат точки  $a$ . Получив решение для одной из гармонических

составляющих, мы путем интегрирования вернёмся к искомой функции  $\varphi(a, t)$ .

Подставляя (9.105) в (9.14) и меняя порядок дифференцирования и интегрирования, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 p(a, \omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t) d\omega + \frac{1}{v_P^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \cdot p(a, \omega) \cdot \exp(i \cdot \omega t) d\omega = 0. \quad (9.106)$$

Уравнение (9.106) справедливо при любом значении  $\omega$ , поэтому можем записать его без знака интеграла. Учитывая также, что волновое число  $k = \omega/v_P$ , получаем вместо (9.106) однородное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 p(a, \omega) + k^2 \cdot p(a, \omega) = 0. \quad (9.107)$$

Будем рассматривать каждую точку поверхности  $S$  в качестве источника элементарной сферической волны. Поэтому для дальнейшего решения задачи, целесообразно ввести функцию вида

$$\frac{\exp\left[i\omega \cdot \left(t - \frac{L}{v_P}\right)\right]}{L} = \frac{\exp(-ikL)}{L} \cdot \exp(i\omega t), \quad (9.108)$$

являющуюся решением однородного уравнения (9.14) в случае гармонической сферической волны (и применении комплексной записи). Примем обозначение  $\exp(-ikL)/L = \psi$ . Итак, имеем в области  $V$  две скалярные функции  $p$  и  $\psi$ , непрерывные вместе со своими производными внутри области  $V$  и на её границе – поверхности  $S[V]$ . Из формулы Грина (2.95')<sub>1</sub> следует, что

$$\int_V (p \cdot \nabla^2 \psi - \psi \cdot \nabla^2 p) dV = \oint_{S[V]} \left( p \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \right) dS. \quad (9.109)$$

Необходимо учесть, однако, что функция  $\psi = \exp(-ikL)/L$  при  $L=0$  не удовлетворяет условиям непрерывности. Поэтому для исключения особенности из рассматриваемой области, что необходимо для применения формулы Грина, окружим точку  $a$  сферической поверхностью с малым радиусом  $R$  и исключим из рассмотрения ограниченную этой поверхностью область (см. **рис. 9.7, в**). Тогда область  $V$  будет ограничена наружной поверхностью  $S[V]$ , а также поверхностью  $S_a$ , и выражение (9.109) следует представить в виде:

$$\int_V (p \cdot \nabla^2 \psi - \psi \cdot \nabla^2 p) dV = \oint_{S[V]} \left( p \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \right) dS + \oint_{S_a} \left( p \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \right) dS. \quad (9.110)$$

Из (9.107) следует, что  $\nabla^2 p = -k^2 \cdot p$ . Величина  $\psi$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца и, следовательно,  $\nabla^2 \psi = -k^2 \cdot \psi$ . Подставляя эти выражения для  $\nabla^2 p$  и  $\nabla^2 \psi$  в (9.110), видим, что левая часть этого уравнения равна нулю.

Выполним также некоторые преобразования со вторым членом в правой части (9.110) с учётом того, что на поверхности  $S_a$  имеем:  $L=R$ ,  $\partial/\partial n = -\partial/\partial R$ , а элемент этой поверхности  $dS_a = R^2 \cdot d\Omega$ , где  $\Omega$  – телесный угол с вершиной в точке  $a$ . В результате из (9.110) получаем

$$\oint_{S[V]} \left( p \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \right) dS + \oint_{S_a} \left[ p \cdot \left( \frac{\exp(-ikR)}{R^2} + ik \cdot \frac{\exp(-ikR)}{R} \right) - \frac{\exp(-ikR)}{R} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} \right] \cdot R^2 d\Omega = 0 \quad (9.111)$$

Устремим радиус  $R$  сферической поверхности  $S_a$  к нулю, сжимая сферу к точке  $a$ . При  $R \rightarrow 0$ , в (9.111) функция  $\frac{\exp(-ikR)}{R} \cdot R^2 \rightarrow 0$ , функция  $\frac{\exp(-ikR)}{R^2} \cdot R^2 \rightarrow 1$  и произведение  $p \cdot \exp(-ikR) \rightarrow p(a)$ . Так как полный телесный угол  $\Omega$  в (9.111) равен  $4\pi$ , получаем следующее выражение для  $p(a, \omega)$ :

$$p(a, \omega) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_{S[V]} \left( \psi \cdot \frac{\partial p}{\partial n} - p \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \quad (9.112)$$

Производная в правой части (9.112)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left[ \exp\left(-i \frac{\omega}{v_P} L\right) / L \right] = \\ &= -\frac{i\omega}{v_P L} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{v_P} L\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial n} - \frac{1}{L^2} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{v_P} L\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial n}. \end{aligned} \quad (9.113)$$

Подставляя это выражение в (9.112), получаем

$$\begin{aligned} p(a, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_{S[V]} \left[ \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{1}{L} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{v_P} L\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\omega \cdot p}{v_P L} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{v_P} L\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial n} + \frac{p}{L^2} \cdot \exp\left(-i \frac{\omega}{v_P} L\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial n} \right] dS. \end{aligned} \quad (9.114)$$

Перейдём теперь от спектральной плотности  $p(a, \omega)$  к искомой функции  $\varphi(a, t)$  и значениям потенциала  $\varphi$  и его производных на поверхности  $S[V]$ . Для этого в соответствии с (9.105) необходимо умножить правую и левую части равенства (9.114) на  $\exp(i\omega t)$  и проинтегрировать по  $\omega$ . Меняя порядок интегрирования, получаем выражение

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(a, \omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \left\{ \left[ \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \exp\left[i\omega \left(t - \frac{L}{v_P}\right)\right] d\omega + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{v_P L} \cdot \frac{\partial L}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega p \cdot \exp\left[i\omega \left(t - \frac{L}{v_P}\right)\right] d\omega + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{L^2} \frac{\partial L}{\partial n} \int_{-\infty}^{\infty} p \cdot \exp\left[i\omega \left(t - \frac{L}{v_P}\right)\right] d\omega \right\} dS, \end{aligned} \quad (9.115)$$

или

$$\varphi(a, t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_{S[V]} \left\{ \frac{1}{L} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] + \frac{1}{v_P L} \cdot \frac{\partial L}{\partial n} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \frac{1}{L^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial n} \cdot [\varphi] \right\} dS. \quad (9.116)$$

Здесь  $L$  – расстояние между любой точкой поверхности  $S[V]$  и точкой наблюдения  $a$ ;  $n$  – внешняя (по отношению к области  $V$ ) нормаль к поверхности  $S[V]$ . Квадратными скобками в (9.116) обозначено то, что соответствующие функции на поверхности  $S[V]$  соответствуют значениям  $\tau = t - L/v_P$ .

Выражение (9.116) – *формула Кирхгофа*. Она позволяет определить потенциал смещения в любой точке области  $V$ , свободной от источников по заданным значениям потенциала и его производных на поверхности  $S[V]$ , ограничивающей эту область. Иными словами, поле смещений в области  $V$  создаваемое источниками, расположенными вне этой области, можно определить, не зная этих источников, если известны значения потенциала и его нормальной производной на поверхности  $S[V]$ .

При определении поля в области  $V$  значения функций  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n$  на поверхности  $S[V]$  заменяют задание данных о всех источниках, находящихся вне этой области.

Обратим внимание на то, что согласно (9.116) потенциал  $\varphi$  поля смещений в точке наблюдения  $a$  для момента времени  $t$  определяют значения потенциала  $\varphi$  и его производных на поверхности  $S[V]$  для времени  $\tau = t - L/v_P$ , так как необходимо определённое время  $\Delta t = L/v_P$  для распространения возмущений от точек поверхности  $S[V]$  до точки наблюдения  $a$ .

Формула Кирхгофа (9.116), показывающая, что смещение в некоторой точке определяют смещения в более близких к источнику точках пространства в более ранние моменты времени, является математическим выражением известного в физике принципа Гюйгенса, согласно которому каждая точка пространства, где происходят колебания, является источником элементарной сферической волны.

Наряду с рассмотренным выше представляет интерес более общий случай, когда кроме внешних источников, находящихся за пределами поверхности  $S$ , имеются источники внутри неё, в области  $V$ , где мы определяем потенциал поля смещений. Вывод формулы для этого случая принципиально ничем не отличается от приведенного выше и поэтому здесь опущен. Заметим только, что здесь приходится искать решение неоднородного волнового уравнения вида (9.10)

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v_P^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Phi, \quad (9.117)$$

где  $\Phi(x, y, z, t)$  – потенциал поля массовых сил – функции описывающей распределение и характер источников в области  $V$ .

Выражение для потенциала поля смещений имеет здесь следующий вид:

$$\varphi(a, t) = \frac{1}{4\pi \cdot v_p^2} \cdot \int_V \frac{1}{L} \cdot [\Phi] dV + \frac{1}{4\pi} \cdot \oint_{S[V]} \left\{ \frac{1}{L} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] + \frac{1}{v_p L} \cdot \frac{\partial L}{\partial n} \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \frac{1}{L^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial n} \cdot [\varphi] \right\} dS. \quad (9.118)$$

Здесь  $L$  в объёмном интеграле – расстояние между элементом внутреннего источника и точкой наблюдения.

Объёмный интеграл в (9.118) является частным решением неоднородного волнового уравнения и соответствует той части потенциала  $\varphi$ , которая вызвана источниками, находящимися в области  $V$ . Поверхностный интеграл в (9.116) и в (9.118) соответствует общему решению однородного волнового уравнения и отражает влияние внешних источников.

Допустим теперь, что  $S[V]$  представляет собой сферическую поверхность, а точка наблюдения  $a$  находится в центре сферы. Все источники расположены снаружи, вне объёма, ограниченного поверхностью  $S$ . Тогда, полагая в формуле (9.116)  $L=R$ , где  $R$  – радиус сферы, и учитывая, что  $R=v_p \cdot t'$ , где  $t'$  – время, необходимое для распространения возмущения от поверхности сферы до её центра, получаем выражение

$$\varphi(a, t) = t' \cdot \frac{\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}}{\partial t} + \frac{\partial(t \cdot \overline{\varphi})}{\partial t} \Big|_{t=t'}, \quad (9.119)$$

где  $\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}$  и  $\overline{\varphi}$  – средние значения функций  $\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]$  и  $[\varphi]$  на поверхности сферы с радиусом  $R$ :

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{1}{4\pi \cdot R^2} \cdot \oint_{S[V]} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] dS; \quad \overline{\varphi} = \frac{1}{4\pi \cdot R^2} \cdot \oint_{S[V]} [\varphi] dS.$$

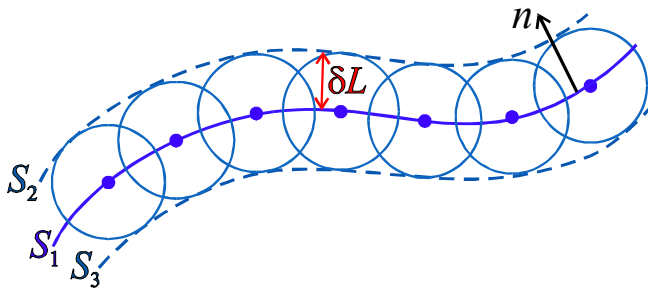
Выражение (9.119) – "формула Пуассона".

### III. Зоны Френеля. Область, существенная при распространении волн

В соответствии с принципом Гюйгенса и формулой Кирхгофа каждую точку пространства, охваченного волновым процессом, можно рассматривать в качестве вторичного точечного источника колебаний. Простейшим примером применения этого принципа является определение положения фронта волны для разных моментов времени, если задано его положение в некоторый момент времени  $t=t_1$ . Допустим, что фронт волны в момент времени  $t_1$  представлен поверхностью  $S_1$ , окружающей источник. Часть этой поверхности изображена на [рис. 9.8](#).

Для определения положения фронта волны в момент времени  $t_2=t_1+\delta t$  в соответствии с принципом Гюйгенса каждую точку поверхности  $S_1$  следует рассматривать в качестве источника элементарной сферической волны. Все эти

вторичные источники начинают действовать в один и тот же момент времени  $t_1$ . В момент  $t_2$  путь, пройденный каждой сферической волной,  $\delta L = v_p \cdot \delta t$ .



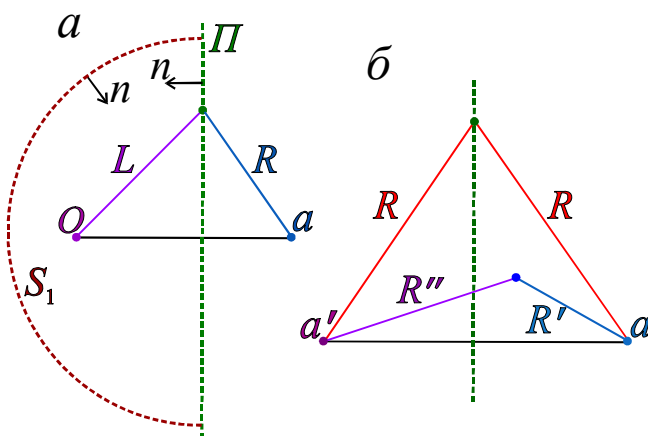
**Рис. 9.8.**

Определение положения фронта волны на основе принципа Гюйгенса

В отличие от такой элементарной кинематической интерпретации принципа Гюйгенса в формуле Кирхгофа, как было показано выше, учитываются амплитудно-фазовые соотношения при взаимодействии вторичных источников, определяющих, характер смещения в каждой данной точке в определённый момент времени.

Наглядную интерпретацию принципа Гюйгенса и сравнительно простой способ определения волнового поля, вытекающий из формулы Кирхгофа, дал А. Френель.

Допустим, что ограничивающая область  $V$  замкнутая поверхность  $S[V]$



**Рис. 9.9.**

Построения при выводе формулы (9.123)

образована плоскостью  $\Pi$  и примыкающей к ней полусферой  $S_1$  (рис. 9.9, а). Точка наблюдения  $a$  находится вне области  $V$ . Источник находится внутри области  $V$ . Примем условие, что источник является точечным, меняется во времени по гармоническому закону  $\cos(\omega t)$ , а в комплексной форме —  $\exp(i \cdot \omega t)$ , и находится в точке  $O$  на прямой, ортогональной плоскости  $\Pi$  и проходящей через точку наблюдения  $a$ . Пользуясь

комплексной записью, представим потенциал  $\varphi$  и некоторое гармонически

меняющееся поле  $\psi$  в виде:  $\varphi = \varphi_0 \cdot \exp(i \cdot \omega t)$ ,  $\psi = \psi_0 \cdot \exp(i \cdot \omega t)$ , где  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  — не зависящие от времени  $t$  комплексные амплитуды.

Действие первичного источника заменяем краевыми условиями, т. е. заданием потенциала  $\varphi$  поля смещений и его нормальной производной  $\partial\varphi/\partial n$  на поверхности, окружающей источник.

В соответствии с (9.112)

$$\overset{\vee}{\varphi}_0(a) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{S_1} \left( \overset{\vee}{\varphi}_0 \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\psi}_0}{\partial n} - \overset{\vee}{\psi} \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\varphi}_0}{\partial n} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Pi} \left( \overset{\vee}{\varphi}_0 \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\psi}_0}{\partial n} - \overset{\vee}{\psi}_0 \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\varphi}_0}{\partial n} \right) dS. \quad (9.120)$$

Устремим теперь радиус полусферы  $S_1$  к бесконечности. Если, как это имеет место в рассматриваемом случае, источник  $O$  и точка наблюдения  $a$  находятся на конечном расстоянии друг от друга, все элементы поверхности  $S[V]$ , бесконечно удалённые от точки  $a$ , т. е. расположенные на полусфере  $S_1$ , не будут вносить вклад в потенциал  $\varphi(a)$ . Таким образом, первый интеграл в правой части (9.120) можно опустить. В результате имеем

$$\overset{\vee}{\varphi}_0(a) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Pi} \left( \overset{\vee}{\varphi}_0 \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\psi}_0}{\partial n} - \overset{\vee}{\psi}_0 \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\varphi}_0}{\partial n} \right) dS. \quad (9.121)$$

Так как источник точечный, в соответствии с (9.108) будем полагать, что

$$\overset{\vee}{\varphi}_0 = \frac{\exp(-i \cdot k L)}{L}.$$

В качестве функции  $\overset{\vee}{\psi}_0$  выберем функцию вида

$$\overset{\vee}{\psi}_0 = \frac{\exp(-i \cdot k R')}{R'} - \frac{\exp(-i \cdot k R'')}{R''}, \quad (9.122)$$

характеризующую разность эффектов сферических волн, исходящих из точек  $a$  и  $a'$ , зеркально-симметричных относительно плоскости  $\Pi$  (рис. 9.9, б). Здесь  $R'$  и  $R''$  – расстояния от точек  $a$  и  $a'$  до любой точки пространства. Целесообразность выбора функции  $\psi$  такого вида определяется тем, что на плоскости  $\Pi$  функция  $\psi$  равна нулю, так как расстояния  $R'$  и  $R''$  до этой плоскости – одинаковы. Таким образом, второй член в правой части (9.121) также будет равен нулю. Тогда

$$\overset{\vee}{\varphi}_0(a) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Pi} \overset{\vee}{\varphi}_0 \cdot \frac{\partial \overset{\vee}{\psi}_0}{\partial n} dS. \quad (9.123)$$

Определим теперь производную  $\overset{\vee}{\partial \varphi}_0 / \partial n$ . Вследствие противоположного направления (наружных по отношению к полупространствам, содержащим точки  $a$  и  $a'$ ) нормалей к плоскости  $\Pi$ , производные от обоих членов (9.122) будут иметь одинаковый знак и, следовательно,

$$\frac{\partial \overset{\vee}{\psi}_0}{\partial n} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\exp(-i \cdot k R)}{R} \right] = -2k \cdot \frac{\exp(-i \cdot k R)}{R} \cdot \left( i + \frac{1}{k R} \right) \cdot \frac{\partial R}{\partial n}. \quad (9.124)$$

Пусть расстояния от точки наблюдения и от источника до плоскости  $\Pi$  таковы, что выполняются условия

$$R \gg \Lambda/2\pi \text{ или } kR \gg 1, \quad L \gg \Lambda/2\pi \text{ или } kL \gg 1.$$

Тогда (9.124) можно записать в виде:

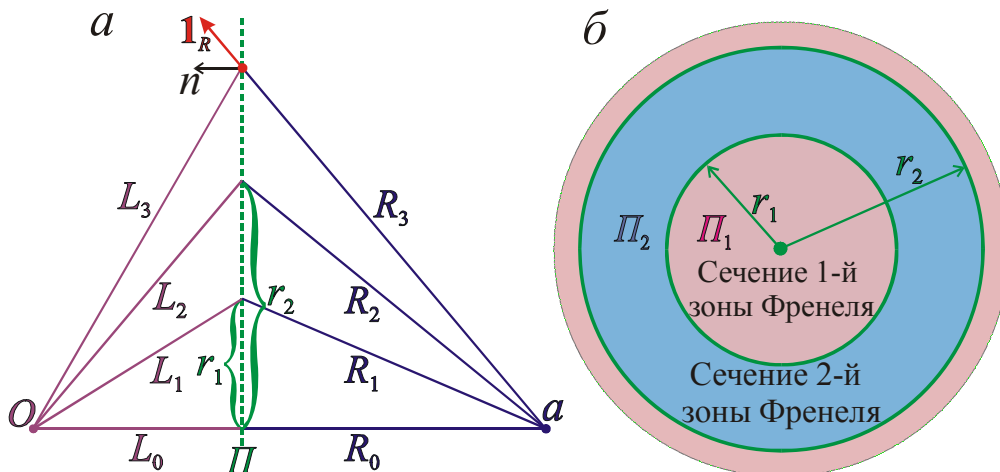
$$\frac{\partial \psi_0}{\partial n} = -2 \cdot \frac{i}{k} \cdot \frac{\exp(-i \cdot k R)}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial n}. \quad (9.125)$$

Учитывая, что  $dR/dn = \cos(\mathbf{1}_R, \mathbf{n})$  и  $k = 2\pi/\Lambda$ , получаем следующее выражение для  $\varphi(a)$ :

$$\varphi_0(a) = \frac{i}{\Lambda} \cdot \int_{\Pi} \frac{\exp[-i \cdot k \cdot (L + R)]}{L \cdot R} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, \mathbf{n}) dS. \quad (9.126)$$

Из (9.126) следует, что потенциал поля смещений в точке  $a$  определяет сумма потенциалов полей элементарных источников, заполняющих плоскость  $\Pi$ . Согласно этому выражению элементарные площадки  $dS$ , находящиеся на одном и том же расстоянии  $R$  от точки наблюдения  $a$  и образующие кольцо  $dS_k$ , будут создавать одинаковый эффект в точке  $a$ , так как в пределах каждого такого кольца расстояния  $L$ ,  $R$  и величина  $\cos(\mathbf{1}_R, \mathbf{n})$  – одинаковы.

Для определения поля в точке  $a$  представим себе систему концентрических колец на плоскости  $\Pi$  (рис. 9.10). Ширину каждого из колец выберем такой, чтобы при переходе от его внутренней границы к внешней сумма расстояний



**Рис. 9.10.**

Зоны Френеля

$R+L$  менялась бы на  $\Lambda/2$ , т. е. выполнялись бы условия:

$$\begin{aligned} (R_1 + L_1) - (R_0 + L_0) &= 1 \cdot (\Lambda/2), \\ (R_2 + L_2) - (R_0 + L_0) &= 2 \cdot (\Lambda/2), \\ &\dots\dots\dots, \\ (R_n + L_n) - (R_0 + L_0) &= n \cdot (\Lambda/2). \end{aligned} \quad (9.127)$$

Построенные таким образом кольцевые зоны называют *зонами Френеля*.

Интеграл в правой части (9.126) можно представить в виде суммы однотипных интегралов, первый из которых – это интеграл по площади первой зоны Френеля, второй – по площади второй зоны и т. д.:



$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\varphi}_0(a) = & \frac{i}{\Lambda} \cdot \int_{\Pi_1} \frac{\exp[-i \cdot k \cdot (L+R)]}{L \cdot R} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, n) dS + \\ & + \dots + \frac{i}{\Lambda} \cdot \int_{\Pi_n} \frac{\exp[-i \cdot k \cdot (L+R)]}{L \cdot R} \cdot \cos(\mathbf{1}_R, n) dS. \end{aligned} \quad (9.128)$$

Подынтегральные выражения во всех членах этой формулы имеют одинаковый вид. Определим площади зон Френеля, которые фигурируют в (9.128). Для этого вначале найдём наружные радиусы  $r$  каждой из зон, выразив их через  $L_0$ ,  $R_0$ , и длину волны. Так как  $r$  намного меньше  $L$  и  $R$ , то

$$L_1 = \sqrt{L_0^2 + r_1^2} \approx L_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1^2}{L_0}, \quad R_1 = \sqrt{R_0^2 + r_1^2} \approx R_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1^2}{R_0}, \quad (9.129)$$

где принято во внимание, что при  $\alpha \ll x$

$$\sqrt{(x^2 + \alpha^2)} = (x^2 + \alpha^2)^{1/2} = x \cdot [1 + (\alpha/x)^2]^{1/2} \approx x \cdot [1 + (\alpha/x)^2/2] = x + \alpha^2/(2x).$$

Учитывая выражение (9.127), получаем:

$$r_1 = \sqrt{\frac{\Lambda \cdot L_0 \cdot R_0}{L_0 + R_0}}. \quad (9.130)$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$r_n = \sqrt{\frac{n \cdot \Lambda \cdot L_0 \cdot R_0}{L_0 + R_0}}, \quad (9.131)$$

то есть радиус  $r_n$  каждой зоны пропорционален  $\sqrt{n}$ .

Отсюда нетрудно заключить, что площади  $S$  всех зон Френеля одинаковы и эти площади определяет выражение

$$S = \frac{\pi \cdot \Lambda \cdot L_0 \cdot R_0}{L_0 + R_0}. \quad (9.132)$$

В интегралах, фигурирующих в (9.128), подынтегральные выражения содержат расстояния  $L$ ,  $R$  и величины  $\cos(\mathbf{1}_R, n)$ , меняющиеся в пределах каждой зоны незначительно. Их средние значения для каждой зоны можно вынести за знак интеграла. Тогда каждый из интегралов, входящих в (9.128), которые мы обозначим  $I$ , будет определять выражение следующего вида:

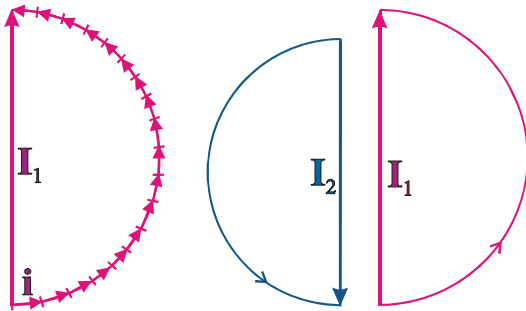
$$I_m = \frac{i}{\Lambda} \cdot \frac{\cos(\mathbf{1}_R, n)}{L \cdot R} \cdot \int_{\Pi_m} \exp[-i \cdot k \cdot (L+R)] dS. \quad (9.133)$$

где  $m=1, 2, \dots, n$ .

Функция  $\exp[-i \cdot k \cdot (L+R)]$  (а при переходе от комплексных амплитуд к действительным величинам  $\cos[k \cdot (L+R)]$ ), стоящая в (9.133) под знаком интеграла, будет существенно меняться в пределах каждой зоны, так как увеличение расстояния  $L+R$  при переходе от внутренней границы зоны к внешней равно  $\Lambda/2$ . Вместе с тем определяющий амплитуду множитель  $\cos(\mathbf{1}_R, n)/(L \cdot R)$ , стоящий перед интегралом, в пределах каждой зоны меняется незначительно, но убывает по мере увеличения номера зоны, так как соответственно будет

увеличиваться произведение  $L \cdot R$  и уменьшаться величина  $\cos(\mathbf{1}_R, n)$  вследствие увеличения угла между  $\mathbf{1}_R$  и  $n$ .

Представим себе, что каждая из зон Френеля состоит из множества узких колец. Источники, расположенные в пределах каждого кольца, создадут в точке наблюдения эффект, который можно изобразить в виде вектора  $\mathbf{i}$  (рис. 9.11). По мере удаления от внутреннего края зоны к наружному векторы  $\mathbf{i}$  будут поворачиваться на некоторый угол в соответствии с изменением фазы возмущения, приходящего в точку наблюдения от колец большего радиуса.



**Рис. 9.11.**

Эффект в точке наблюдения от первых двух зон Френеля

Разница в фазе между вектором, характеризующим эффект от первого кольца, находящегося у внутренней границы зоны, и последнего, расположенного у внешней границы, составляет по условию построения зон Френеля величину, равную  $\pi$ . Результирующий эффект от зоны будет определять "замыкающий" вектор  $\mathbf{I}_1$ . Эффект от следующей зоны Френеля будет характеризовать вектор  $\mathbf{I}_2$  (см.

рис. 9.11), несколько меньшим по величине из-за уменьшения амплитудного множителя перед интегралом (9.133) и направленным противоположно по отношению к  $\mathbf{I}_1$ . Таким образом, соседние зоны создают в точке наблюдения эффекты, которые в значительной мере компенсируют друг друга.

В соответствии со сказанным, выражение (9.128) для  $\overset{\vee}{\varphi}_0(a)$  можно представить в виде знакопеременного ряда с убывающими по абсолютной величине членами

$$\overset{\vee}{\varphi}_0(a) = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + \dots \quad (9.134)$$

Запишем (9.134) в следующем виде:

$$\overset{\vee}{\varphi}_0(a) = \frac{I_1}{2} + \left( \frac{I_1}{2} - I_2 + \frac{I_3}{2} \right) + \left( \frac{I_3}{2} - I_4 + \frac{I_5}{2} \right) + \dots$$

В правой части этого равенства заключённые в скобки суммы будут малыми величинами по сравнению со слагаемым  $I_1/2$ , так как полусумма  $(I_1 + I_3)/2$  незначительно отличается от  $I_2$ ,  $(I_3 + I_5)/2$  – от  $I_4$  и т. д. Поэтому можно записать приближенное выражение

$$\overset{\vee}{\varphi}_0(a) = I_1/2, \quad (9.135)$$

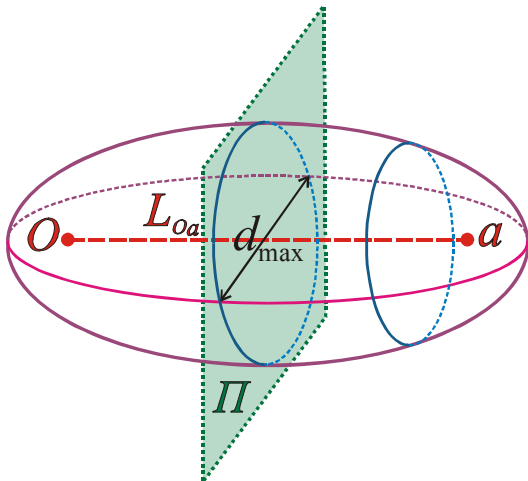
т. е. суммарный возмущающий эффект в точке наблюдения определяет, в основном, "действие" половины первой зоны Френеля.

В соответствии с (9.132) половина площади любой, в том числе первой, зоны Френеля

$$\frac{S}{2} = \frac{\pi \cdot \Lambda}{2} \cdot \frac{L_0 \cdot R_0}{L_0 + R_0}. \quad (9.136)$$

Отсюда следует, что радиус круга, площадь которого составляет; половину первой зоны

$$r = \sqrt{\frac{\Lambda}{2} \cdot \frac{L_0 \cdot R_0}{L_0 + R_0}}. \quad (9.137)$$



**Рис. 9.12.**

Пространственное представление первой зоны Френеля

Равенствам (9.127) соответствуют уравнения эллипсоида вращения с фокусами в точках расположения источника  $O$  и точки наблюдения  $a$  (рис. 9.12). Следующие (после первой) зоны Френеля соответствуют пространствам между двумя соседними эллипсоидами вращения. Эллипсоидом вращения будет также, очевидно, и область с сечениями, равными половине первой зоны. Эта часть пространства и определяет процесс распространения возмущений от источника к точке наблюдения. Её называют *областью, существенной*

*для распространения волн.*

При изменении расстояний  $L_0$  и  $R_0$  и перемещений плоскости  $\Pi$  радиус  $r=d/2$  области, существенной для распространения, будет меняться в соответствии с формулой (9.137). Максимальным этот радиус  $r_{\max}=d_{\max}/2$  будет при  $L_0=R_0=L_{Oa}/2$  (см. рис. 9.12). Следовательно, в этом случае из (9.137) для радиуса  $r_{\max}$  имеем

$$r_{\max} = \frac{\sqrt{\Lambda \cdot R_0}}{2}, \quad (9.138)$$

или, принимая во внимание, что сумма  $L_0+R_0=L_{Oa}$ , при  $L_0=R_0$  получаем другой вид формулы (9.138)

$$r_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\Lambda \cdot L_{Oa}}. \quad (9.139)$$

Таким образом, размер области, существенной для распространения волн, зависит от расстояния  $L_{Oa}$  между точечным источником волн и точкой наблюдения и от длины волны  $\Lambda$ . Чем меньше длина волны, тем меньше  $r_{\max}$ . Из (9.138), (9.139) следует, что при  $\Lambda \rightarrow 0$  радиус  $r_{\max} \rightarrow 0$  и (соответственно) диаметр  $d_{\max}=2 \cdot r_{\max} \rightarrow 0$  (см. рис. 9.12). Следовательно, при  $\Lambda \rightarrow 0$  показанный на этом рисунке эллипсоид вращения вырождается в отрезок  $L_{Oa}$  прямой. В этом случае волна распространяется от источника до точки наблюдения по отрезку прямой линии (*геометрическая акустика, а для ЭМ поля – геометрическая оптика*).

На основе представлений о зонах Френеля и области, существенной для распространения волн, можно также "более отчётливо" представить себе процесс отражения упругих колебаний от поверхности  $S$  раздела двух сред, отличающихся по упругим свойствам. В соответствии со сказанным выше (и в соответствии с представлениями, применяемыми в геометрической акустике) эффект отражения должен зависеть от размеров той площадки  $\Delta S$  (на границе  $S$  двух различающихся по параметрам  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  сред), которая существенно влияет на отражение. В соответствии со сказанным выше размеры такой площадки  $\Delta S$  уменьшаются при уменьшении длины волны  $\Lambda$ .

## § 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Неоднородность среды существенным образом влияет на распространение упругих колебаний. В отличие от безграничной однородной среды в неоднородной среде происходит отражение, преломление, дифракция волн, могут существовать поверхностные волны и т. д. Наблюдаемая волновая картина сложным образом зависит от геометрии среды, распределения упругих и плотностных свойств и ряда других факторов. Из многих вопросов, связанных с распространением упругих волн в неоднородных средах, мы коснёмся лишь двух явлений, происходящих при падении плоской волны на плоскую границу, и волн Релея, существующих при распространении упругих колебаний в присутствии свободной поверхности раздела.

### I. Граничные условия для полей смещений $\mathbf{u}_P$ , $\mathbf{u}_S$

На рис. 9.13  $S$  – граница 2-х областей пространства (порознь однородных упругих сред). Для области  $V_1$  обозначим упругие постоянные Ламэ  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  и плотность  $\rho_1$ , а соответствующие этим параметрам скорости продольных и поперечных волн:  $v_{P1}$ ,  $v_{S1}$ . В области  $V_2$  имеем:  $\lambda=\lambda_2$ ,  $\mu=\mu_2$ ,  $\rho=\rho_2$ ,  $v_P=v_{P2}$ ,  $v_S=v_{S2}$ .

В соответствии с (9.14'), (9.15') в однородной области  $V_1$  составляющие  $\mathbf{u}_{P1}$ ,  $\mathbf{u}_{S1}$  поля смещений  $\mathbf{u}_1$  удовлетворяют

$$\text{волновым уравнениям} \quad \nabla^2 \mathbf{u}_{P1} = \frac{1}{v_{P1}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{P1}}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}_{S1} = \frac{1}{v_{S1}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{S1}}{\partial t^2}. \quad \text{Если поля } \mathbf{u}_{P1}, \mathbf{u}_{S1} -$$

гармонически меняющиеся с круговой частотой  $\omega$  и мы пользуемся комплексной формой записи, то эти поля удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \check{\mathbf{u}}_{P1} + k_{P1}^2 \check{\mathbf{u}}_{P1} = 0, \quad \nabla^2 \check{\mathbf{u}}_{S1} + k_{S1}^2 \check{\mathbf{u}}_{S1} = 0, \quad \text{в которых}$$

волновые числа  $k_{P1}=\omega/v_{P1}$ ,  $k_{S1}=\omega/v_{S1}$ . Аналогичным образом, в однородной области  $V_2$  волновые

уравнения для  $\mathbf{u}_{P2}$ ,  $\mathbf{u}_{S2}$ :  $\nabla^2 \mathbf{u}_{P2} = \frac{1}{v_{P2}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{P2}}{\partial t^2}$ ,  $\nabla^2 \mathbf{u}_{S2} = \frac{1}{v_{S2}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{S2}}{\partial t^2}$ . Уравнения

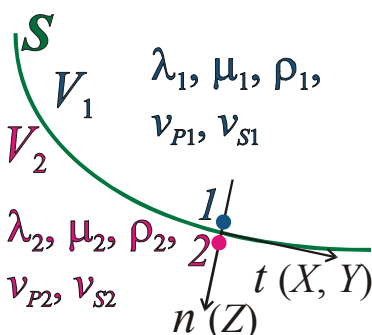


Рис. 9.13.

К граничным условиям для полей смещений.

$$L_{12} \rightarrow 0$$

для гармонически меняющихся полей  $\mathbf{u}_{P2}$ ,  $\mathbf{u}_{S2}$  в области  $V_2$ :  
 $\nabla^2 \check{\mathbf{u}}_{P1} + k_{P2}^2 \check{\mathbf{u}}_{P2} = 0$ ,  $\nabla^2 \check{\mathbf{u}}_{S2} + k_{S2}^2 \check{\mathbf{u}}_{S2} = 0$ , а волновые числа  $k_{P2} = \omega/v_{P2}$ ,  
 $k_{S2} = \omega/v_{S2}$ .

Установим теперь то, каким условиям (при решении прямых задач теории распространения упругих колебаний) должно удовлетворять поле смещений  $\mathbf{u}$  или его декартовы компоненты  $u$ ,  $v$ ,  $w$  на границе  $S$  областей  $V_1$ ,  $V_2$ .

Пусть направление нормали  $n$  к границе  $S$  совпадает с направлением оси  $Z$ , а два из множества касательных к границе  $S$  направлений  $t$  совпадают с направлениями осей  $X$ ,  $Y$ . Расстояние между лежащими по разные стороны границы  $S$  точками  $1$ ,  $2$  – бесконечно-мало ( $L_{12} \rightarrow 0$ ).

Из физических соображений очевидно, что при решении прямых задач теории распространения упругих колебаний на границе  $S$  надо потребовать выполнения следующих 2-х условий.

1). Непрерывность поля смещений  $\mathbf{u}$ , его декартовых компонент  $u$ ,  $v$ ,  $w$  или компонент поля  $\mathbf{u}$  в других системах координат. В противном случае (в абсолютно-упругой среде) "возникнут", например, такие явления, как "трещины" на  $S$ , "внедрение" области  $V_1$  в область  $V_2$ , "проскальзывание" областей  $V_1$ ,  $V_2$  по их границе  $S$ . Это означает (рис. 9.13), что

$$\text{на } S: \quad u_n^{(2)} = u_n^{(1)}, \quad u_t^{(2)} = u_t^{(1)}, \quad (9.140)$$

где  $u_n$ ,  $u_t$  – нормальная и касательная к границе  $S$  компоненты поля  $\mathbf{u}$  в точках  $1$ ,  $2$ .

2). По 3-му закону Ньютона на границе  $S$  должны быть непрерывны нормальные ( $\sigma$ ) и тангенциальные ( $\tau$ ) компоненты упругих напряжений. Согласно (8.67), (8.32), эти напряжения можно выразить через упругие постоянные Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu$  и производные компонент поля смещений по координатам:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z;$$

$$\tau_{yz} = 2\mu\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = 2\mu\gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = 2\mu\gamma_{xy}.$$

Пусть граница  $S$  – плоскость  $z = \text{const}$  декартовых координат, а поле смещений  $\mathbf{u} = \mathbf{1}_x \cdot u(x, z) + \mathbf{1}_z \cdot w(x, z)$ . Последнее равенство означает, что у поля  $\mathbf{u}$   $y$  – компонента  $v = 0$ , а ненулевые компоненты  $u$ ,  $w$  не зависят от координаты  $y$ . При этих условиях граничные условия на плоскости  $S$  принимают следующий вид. При  $z = \text{const}$ :

$$1). \quad u^{(2)} = u^{(1)}, \quad w^{(2)} = w^{(1)}; \quad (9.141)$$

$$2). \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{z2} = \sigma_{z1} \quad \text{или} \quad \lambda_2 \theta_2 + 2\mu_2 \varepsilon_{z2} = \lambda_1 \theta_1 + 2\mu_1 \varepsilon_{z1}, \\ \tau_{zx2} = \tau_{zx1} \quad \text{или} \quad \mu_2 \gamma_{zx2} = \mu_1 \gamma_{zx1}. \end{aligned} \right\} \quad (9.142)$$

Примем во внимание следующее. Согласно (8.55) дилатация  $\theta = \text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ . Если  $y$  – компонента  $v = 0$ , то  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$ . Компонента

деформации растяжения-сжатия  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ . Компонента деформации сдвига

$\gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ . Поэтому при  $\mathbf{u} = \mathbf{1}_x \cdot u(x, z) + \mathbf{1}_z \cdot w(x, z)$  граничные условия (9.142) можем выразить через производные компонент поля смещений и упругие постоянные Ламэ. При  $z = \text{const}$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} + (\lambda_2 + 2\mu_2) \cdot \frac{\partial w_2}{\partial z} &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\lambda_1 + 2\mu_1) \cdot \frac{\partial w_1}{\partial z}, \\ \mu_2 \cdot \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) &= \mu_1 \cdot \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.143)$$

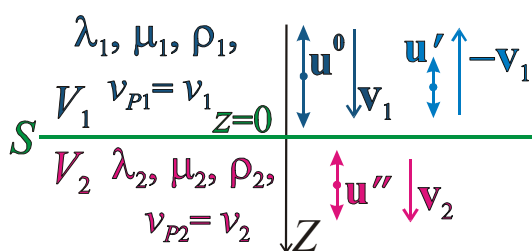
## II. Нормальное падение плоской гармонической продольной волны на плоскую границу

Пусть в безграничной однородной упругой среде с параметрами  $\lambda_1, \mu_1, \rho_1$  распространяется по направлению оси  $Z$  (например, вертикально вниз) со скоростью  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{1}_z \cdot v_{P1} = \mathbf{1}_z \cdot v_1$  плоская продольная гармоническая упругая волна.

Согласно (9.26') скорость  $v_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}$ . Соответствующее этой волне поле

смещений обозначим:  $\mathbf{u}_P = \mathbf{u}^0 = \mathbf{1}_z \cdot w^0(z, t)$ . Знаем, что в соответствии с (6.25), решение уравнения струны для компоненты  $w^0$  имеет вид  $w^0 = f(t - z/v_1)$ , где  $f$  – любая дважды дифференцируемая по  $z$  и  $t$  функция аргумента  $t - z/v_1$ . Для гармонической волны при применении комплексной записи выражение для  $w^0$  можем представить в виде:  $\check{w}^0(z, t) = \check{w}^0(0, 0) \cdot \exp[i\omega \cdot (t - z/v_1)]$ , где  $\check{w}^0(0, 0)$  – компонента  $w^0$  при  $z=0$  и  $t=0$ .

Пусть теперь модель среды отличается от безграничной однородной. Есть



**Рис. 9.14.**

Нормальное падение плоской продольной упругой волны на плоскую границу

ортогональная оси  $Z$  граница – плоскость  $S$ , ниже которой параметры среды имеют значения  $\lambda_2, \mu_2, \rho_2$  (рис. 9.14). Тогда поле  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{1}_z \cdot w^0$  характеризует волну, падающую на границу  $S$  по направлению нормали  $Z$  к  $S$ . Будем полагать, что в плоскости  $S$  координата  $z=0$ .

Из физических представлений понятно, что в присутствии границы  $S$  в верхнем полупространстве  $V_1$ , кроме падающей волны, будет существовать

отражённая гармоническая продольная волна, распространяющаяся в направлении, противоположном направлению оси  $Z$  со скоростью  $-\mathbf{v}_1 = -\mathbf{1}_z \cdot v_{P1} = -\mathbf{1}_z \cdot v_1$ . Поле смещений этой волны обозначим:  $\mathbf{u}' = \mathbf{1}_z \cdot w'(z, t)$ . В нижнем полупространстве  $V_2$  по направлению оси  $Z$  будет распространяться со скоростью  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{1}_z \cdot v_{P2} = \mathbf{1}_z \cdot v_2$  "проходящая" (границу  $S$ ) гармоническая продольная волна с той же круговой частотой  $\omega$ , что у падающей волны. Её скорость

$v_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2}}$ . Поле смещений этой волны обозначим:  $\mathbf{u}'' = \mathbf{1}_z \cdot w''(z, t)$ .

Определим поля смещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{1}_z \cdot w_1 = \mathbf{1}_z \cdot (w^0 + w')$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{1}_z \cdot w_2 = \mathbf{1}_z \cdot w''$  в полупространствах  $V_1$ ,  $V_2$ , полагая, что поле падающей волны  $\overset{\vee}{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{w}^0(z, t) = \mathbf{1}_z \cdot \overset{\vee}{w}^0(0, 0) \cdot \exp[i\omega \cdot (t - z/v_1)]$  – задано (известно).

Принимая во внимание сказанное в разделе I, будем искать выражения для  $\overset{\vee}{w}_1$ ,  $\overset{\vee}{w}_2$  в следующем виде. В полупространстве  $V_1$ :

$$\overset{\vee}{w}_1 = \overset{\vee}{w}^0 + \overset{\vee}{w}' = \overset{\vee}{w}^0(0, 0) \cdot \{ \exp[i\omega \cdot (t - z/v_1)] + A_P \cdot \exp[i\omega \cdot (t + z/v_1)] \}. \quad (9.144)$$

В полупространстве  $V_2$ :

$$\overset{\vee}{w}_2 = \overset{\vee}{w}'' = B_P \overset{\vee}{w}^0(0, 0) \cdot \exp[i\omega \cdot (t - z/v_2)]. \quad (9.145)$$

На границе  $S$ , при  $z=0$ , для компоненты поля отражённой волны получаем:  $w'(0, t) = A_P \cdot w^0(0, t)$ , а для проходящей волны –  $w''(0, t) = B_P \cdot w^0(0, t)$ . Это означает, что  $A_P$  – коэффициент отражения, а  $B_P$  – коэффициент прохождения плоской продольной ( $P$ ) волны при её нормальном падении на плоскую границу  $S$ . Определим коэффициенты  $A_P$ ,  $B_P$ .

В соответствии с (9.144), (9.145) из граничных условий (9.141) - (9.143) получаем систему двух уравнений:

$$\text{при } z=0: \quad \text{а). } \overset{\vee}{w}_2 = \overset{\vee}{w}_1, \quad \text{б). } (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial \overset{\vee}{w}_2}{\partial z} = (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial \overset{\vee}{w}_1}{\partial z}. \quad (9.146)$$

Подставляя выражения (9.144), (9.145) для  $\overset{\vee}{w}_1$ ,  $\overset{\vee}{w}_2$  в (9.146), дифференцируя, полагая  $z=0$  и сокращая множитель  $\exp(i\omega \cdot t)$ , получаем систему двух алгебраических уравнений для  $A_P$ ,  $B_P$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{а)} \quad B_P &= 1 + A_P \\ \text{б)} \quad -B_P \frac{(\lambda_2 + 2\mu_2)}{v_2} &= (-1 + A_P) \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)}{v_1} \end{aligned} \right\}. \quad (9.147)$$

Учтём, что, согласно (9.26'), для продольной волны отношение  $\frac{(\lambda + 2\mu)}{v} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{v_P} = \frac{(\lambda + 2\mu)\sqrt{\rho}}{\sqrt{(\lambda + 2\mu)}} = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}$ .  $\rho = v_P \cdot \rho = Z_P$ , где  $Z_P = v_P \cdot \rho$  –

*акустическая жёсткость* для  $P$ -волны. Иногда для этих волн произведение  $v_P \cdot \rho$  называют волновым сопротивлением.

При приведенном выше определении параметра "акустическая жёсткость"  $Z_P$  из системы уравнений (9.147) получаем следующие выражения для коэффициента отражения  $A_P$  и коэффициента прохождения  $B_P$ :

$$A_P = \frac{Z_{P1} - Z_{P2}}{Z_{P1} + Z_{P2}}, \quad B_P = 1 + A_P = \frac{2 \cdot Z_{P1}}{Z_{P1} + Z_{P2}}. \quad (9.148)$$

Так как  $A_P = \frac{Z_{P1} - Z_{P2}}{Z_{P1} + Z_{P2}} = \frac{Z_{P1}/Z_{P2} - 1}{Z_{P1}/Z_{P2} + 1}$ , а  $B_P = 1 + A_P$ , то коэффициент

отражения  $A_P$  и коэффициент прохождения  $B_P$  при нормальном падении плоской продольной волны на плоскость  $S$  зависят только от отношения  $Z_{P1}/Z_{P2}$  акустических жёсткостей  $Z_{P1}, Z_{P2}$  граничащих упругих сред.

Согласно (9.148) (в абсолютно-упругой среде) коэффициенты отражения и прохождения – действительные величины. В § 5 главы седьмой было показано, что в случае нормального падения плоской гармонической электромагнитной волны на плоскую границу  $S$  коэффициенты отражения и прохождения могут быть комплексными. Но эти коэффициенты – действительные величины если, например,  $S$  – граница двух (идеальных) изоляторов.

В соответствии с (9.148) коэффициент отражения  $A_P > 0$  при  $Z_{P1} > Z_{P2}$  и этот коэффициент  $A_P < 0$  при  $Z_{P1} < Z_{P2}$ . Это означает, что во втором случае на границе  $S$  фазы компонент  $w^0(0, t), w^1(0, t) = A_P \cdot w^0(0, t)$  различаются на  $\pi$  (отражение с потерей полуволны, см. раздел II § 5 в главе седьмой).

### III. Нормальное падение плоской гармонической линейно поляризованной поперечной волны на плоскую границу

У продольной упругой волны поле смещений  $\mathbf{u}_P$  поляризовано линейно (см. раздел III в главе шестой). В каждой точке пространства смещения коллинеарны направлению распространения волны. У поперечной волны такие смещения происходят в плоскостях ортогональных направлению распространения. Но в частном случае поле  $\mathbf{u}_S$  такой волны может поляризовано линейно.

Пусть в безграничной однородной упругой среде с параметрами  $\lambda_1, \mu_1, \rho_1$  распространяется по направлению оси  $Z$  со скоростью  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{1}_z \cdot v_{S1} = \mathbf{1}_z \cdot v_1$  плоская линейно поляризованная поперечная гармоническая упругая волна. Выберем направления осей  $X, Y$  так, чтобы  $y$ -компонента  $v$  поля  $\mathbf{u}$  была равна нулю. Тогда для такой волны поле смещений  $\mathbf{u}_S = \mathbf{u}^0 = \mathbf{1}_x \cdot u^0(z, t)$ . В соответствии с (6.25) решение уравнения струны для компоненты  $u^0$  имеет вид  $u^0 = f(t - z/v_1)$ , где  $f$  – функция аргумента  $t - z/v_1$ . Для гармонической волны при применении комплексной записи выражение для  $u^0$  можем представить в виде:  $u^0(z, t) = u^0(0, 0) \cdot \exp[i\omega \cdot (t - z/v_1)]$ , где  $u^0(0, 0)$  –  $x$ -компонента  $u^0$  поля  $\mathbf{u}^0$  при  $z=0$  и  $t=0$ .

Скорость  $v_{S1} = v_1$  поперечной волны в упругой среде с параметрами  $\mu_1, \rho_1$  определяет выражение (9.54'). В полупространстве  $V_1$  (рис. 9.15) скорость  $v_{S1} = v_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ . Для гармонической волны при применении комплексной записи выражение для  $u^0$  можем представить в виде:

$$u^0(z, t) = u^0(0, 0) \cdot \exp[i\omega \cdot (t - z/v_1)],$$

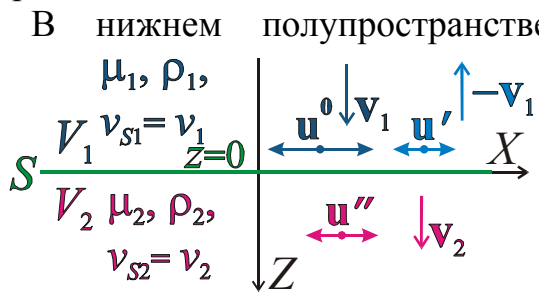
где  $u^0(0, 0)$  – компонента  $u^0$  при  $z=0$  и  $t=0$ .

Пусть теперь модель среды отличается от безграничной однородной. Есть ортогональная оси  $Z$  граница – плоскость  $S$ , ниже которой параметры среды:  $\mu_2, \rho_2$  (см. рис. 9.15). Тогда поле  $\mathbf{u}^0$  характеризует волну, падающую на границу  $S$  по направлению нормали  $Z$  к  $S$ . Выберем  $z=0$  в плоскости  $S$ .

Как и в разделе II, в полупространстве  $V_1$  кроме падающей волны, будет существовать отражённая гармоническая поперечная волна,



распространяющаяся в направлении, противоположном направлению оси  $Z$  со скоростью  $v_1$ . Поле смещений этой волны обозначим:  $\mathbf{u}' = \mathbf{1}_z \cdot u'(z, t)$ .



**Рис. 9.15.**

Нормальное падение плоской поперечной линейно поляризованной упругой волны на плоскую границу

в нижнем полупространстве  $V_2$  по направлению оси  $Z$  будет распространяться со скоростью  $v_2 = \mathbf{1}_z \cdot v_{S2} = \mathbf{1}_z \cdot v_2$ , проходящая (в полупространстве  $V_2$ ) гармоническая поперечная волна. Её скорость  $v_2 = \sqrt{\mu_2 / \rho_2}$ . Поле смещений этой волны обозначим:  $\mathbf{u}'' = \mathbf{1}_z \cdot u''(z, t)$ .

Определим поля смещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{1}_z \cdot u_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{1}_z \cdot u_2$  в полупространствах  $V_1$ ,  $V_2$ , полагая, что (в комплексной форме) ненулевая компонента  $u^0$  поля

падающей волны  $\check{u}^0(z, t) = \check{u}^0(0, 0) \cdot \exp[i\omega \cdot (t - z/v_1)]$  – задана.

При учёте сказанного выше будем искать выражения для  $\check{u}_1$ ,  $\check{u}_2$  в следующем виде. В полупространстве  $V_1$ :

$$\check{u}_1 = \check{u}^0 + \check{u}' = \check{u}^0(0, 0) \cdot \{ \exp[i\omega \cdot (t - z/v_1)] + A_S \cdot \exp[i\omega \cdot (t + z/v_1)] \}. \quad (9.149)$$

В полупространстве  $V_2$ :

$$\check{u}_2 = \check{u}'' = B_S \cdot \check{u}^0(0, 0) \cdot \exp[i\omega \cdot (t - z/v_2)]. \quad (9.150)$$

На границе  $S$  (при  $z=0$ ) для компоненты поля отражённой волны получаем:  $u'(0, t) = A_S \cdot u^0(0, t)$ , а для проходящей волны –  $u''(0, t) = B_S \cdot u^0(0, t)$ . То есть  $A_S$  – коэффициент отражения, а  $B_S$  – коэффициент "прохождения" плоской поперечной волны при её нормальном падении на плоскость  $S$ . Получим выражения для коэффициентов  $A_S$ ,  $B_S$ .

Из (9.149), (9.150) и граничных условий (9.141), (9.143) следует, что

$$\text{при } z=0: \quad \text{а). } \check{u}_2 = \check{u}_1, \quad \text{б). } \mu_2 \frac{\partial \check{u}_2}{\partial z} = \mu_1 \frac{\partial \check{u}_1}{\partial z}. \quad (9.151)$$

После дифференцирования получаем для  $A_S$ ,  $B_S$  систему двух алгебраических уравнений. Её решение:

$$A_S = \frac{Z_{S1} - Z_{S2}}{Z_{S1} + Z_{S2}}, \quad B_S = 1 + A_S = \frac{2 \cdot Z_{S1}}{Z_{S1} + Z_{S2}}, \quad (9.152)$$

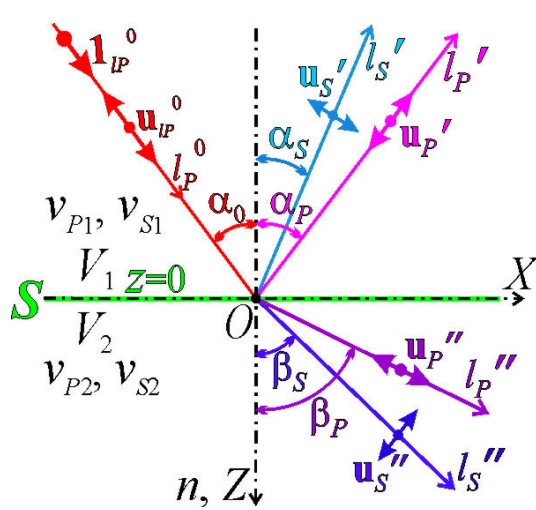
где  $Z_{S1} = v_{S1} \cdot \rho_1$ ,  $Z_{S2} = v_{S2} \cdot \rho_2$  – акустические жёсткости граничащих сред для  $S$ -волн.

#### IV. Отражение и прохождение плоской гармонической продольной волны, падающей на плоскую поверхность раздела

Как и в разделах II, III, плоскость  $S$  – граница 2-х однородных полупространств:  $V_1$  (с параметрами  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\rho_1$  и скоростями  $v_{P1}$ ,  $v_{S1}$ ) и  $V_2$  (с параметрами  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$ ,  $\rho_2$  и скоростями  $v_{P2}$ ,  $v_{S2}$ ). В декартовых координатах

граница  $S$  – плоскость  $z=0$  и, соответственно, ось  $Z$  направлена по нормали  $n$  к плоскости  $S$ . Оси  $X, Y$  лежат в плоскости  $S$ .

Из полупространства  $V_1$  на границу  $S$  падает плоская продольная упругая волна, распространяющаяся в направлении  $l_P^0$ , лежащем в плоскости  $XOZ$ . По направлению  $l_P^0$  ориентирован единичный вектор  $\mathbf{1}_{l_P^0}$ . Скорость этой волны



**Рис. 9.16.**

Отражение и прохождение плоской продольной волны, падающей на плоскую поверхность раздела

можно записать в виде

$$\check{\mathbf{u}}_P^0 = \mathbf{1}_{l_P^0}^0 \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{l_P^0}{v_{P1}} \right) \right] = \mathbf{1}_{l_P^0}^0 \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0}{v_{P1}} \right) \right], \quad (9.153)$$

где  $a_0$  – амплитуда колебаний в падающей волне.

При падении волны на поверхность раздела каждую точку этой поверхности в соответствии с принципом Гюйгенса может рассматривать в качестве точечного источника вторичных волн. Генерируемые колебания распространяются в верхнем полупространстве – отражённая волна и в нижнем полупространстве – проходящая волна. Отражённые и проходящие колебания изменяются во времени так же, как и у падающей волны, т. е. по гармоническому закону с теми же, что у падающей волны, круговой частотой  $\omega$  и периодом колебаний  $T=2\pi/\omega$ . Из (9.153), в частности, следует, что уравнение  $x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0 = \text{const}$  определяет положение ортогональных направлению  $\mathbf{1}_{l_P^0}$  синфазных плоскостей.

Поле  $\mathbf{u}_{l_P^0}^0 = \mathbf{1}_x \cdot u_P^0 + \mathbf{1}_z \cdot w_P^0$ . Получим выражения для  $x$ -компоненты  $u_P^0$  и  $z$ -компоненты  $w_P^0$  поля  $\check{\mathbf{u}}_{l_P^0}^0$ . Так как  $u_P^0 = u_{l_P^0}^0 \cdot \sin \alpha_0$ , а  $w_P^0 = u_{l_P^0}^0 \cdot \cos \alpha_0$  (рис. 9.16, рис. 9.17, а), то из (9.153) для декартовых компонент поля падающей на границу  $S$  плоской продольной волны получаем:

$$v_{P1} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}. \quad \text{Соответствующее этой}$$

волне поле смещений обозначим  $\mathbf{u}_P^0$ . Угол между направлениями  $l_P^0$  и нормали  $n$  ( $Z$ ) к  $S$  обозначим  $\alpha_0$  (рис. 9.16).

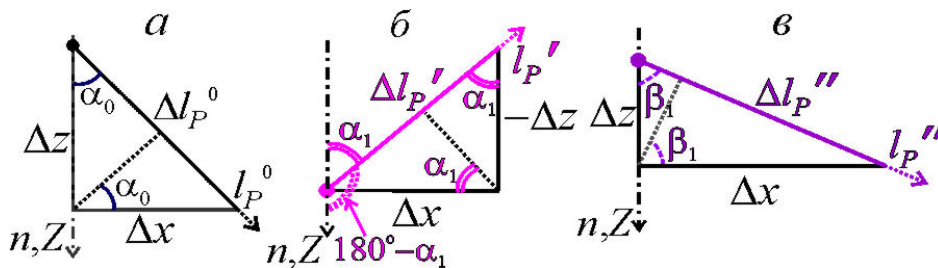
При сделанном выборе направлений декартовых осей  $y$ -компонента ( $v_P^0$ ) поля смещений падающей волны равна нулю и поле смещений  $\mathbf{u}_P^0 = \mathbf{1}_x \cdot u_P^0 + \mathbf{1}_z \cdot w_P^0$  будет одинаковым в любой плоскости  $y = \text{const}$ .

Будем полагать, что поле  $\mathbf{u}$  меняется во времени по гармоническому закону – в комплексной форме  $\exp(i \cdot \omega t)$ . Тогда выражение для вектора смещения  $\mathbf{u}_P^0$  падающей волны согласно (9.79), (9.85)

$$\left. \begin{aligned} \check{u}_{P^0} &= a_0 \cdot \sin \alpha_0 \cdot \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0}{v_{P1}} \right) \right], \\ \check{w}_{P^0} &= a_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0}{v_{P1}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.154)$$

Соответствующие равенству (9.153) выражения (9.154) определяют (в комплексной форме) ненулевые декартовы скалярные компоненты поля смещений  $\mathbf{u}_{IP}^0$  в безграничной однородной среде с параметрами  $\lambda_1, \mu_1, \rho_1$ .

Теперь надо учесть влияние границы  $S$  однородных областей  $V_1, V_2$  на поле смещений в полупространствах  $V_1, V_2$ . Известно, что в этом случае при наклонном падении упругой волны на границу  $S$  в полупространстве  $V_1$ , кроме



**Рис. 9.17.**

К обозначению углов для падающей  $P$ -волны ( $a$ ), отражённой  $P$ -волны ( $б$ ) и проходящей  $P$ -волны ( $в$ )

падающей волны, будут существовать две отражённые волны: продольная (по направлению  $l_P'$  с полем смещения  $\mathbf{u}_{P'}$ ) и поперечная (по

направлению  $l_S'$  полем смещения  $\mathbf{u}_{S'}$ ). В полупространстве  $V_2$  будут распространяться две проходящие волны: продольная (по направлению  $l_P''$  с полем смещения  $\mathbf{u}_{P''}$ ) и поперечная по направлению  $l_S''$  с полем смещения  $\mathbf{u}_{S''}$  (см. рис. 9.16). Если падающая волна – плоская гармоническая с круговой частотой  $\omega$ , то отражённые и проходящие волны также будут плоскими, гармоническими с круговой частотой  $\omega$ . В полупространстве  $V_1$  суммарное поле вектора смещения  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_{IP}^0 + \mathbf{u}_{P'} + \mathbf{u}_{S'}$ , а в полупространстве  $V_2$  это поле  $\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}_{P''} + \mathbf{u}_{S''}$ .

(Острые) углы между линией нормали  $n$  к  $S$  и направлениями распространения волн обозначим соответственно:  $\alpha_P$  для  $l_P'$ ,  $\alpha_S$  для  $l_S'$ ,  $\beta_P$  для  $l_P''$ ,  $\beta_S$  для  $l_S''$  (см. рис. 9.16 и примеры на рис. 9.17).

Так как круговые частоты  $\omega$  и периоды  $T = 2\pi/\omega$  у всех пяти волн одинаковы, то для отражённой продольной  $P$ -волны, распространяющейся по направлению  $l_P'$ , и для отражённой поперечной  $S$ -волны, распространяющейся по направлению  $l_S'$ , (при  $z \leq 0$ ) справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{u}}_{P'} &= \mathbf{1}_{l_P'} \cdot \check{u}_{P'}, & \check{u}_{P'} &= A_P(\alpha_0) \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{l_P'}{v_{P1}} \right) \right], \\ \check{\mathbf{u}}_{S'} &= \mathbf{1}_{l_S'} \cdot \check{u}_{S'}, & \check{u}_{S'} &= A_S(\alpha_0) \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{l_S'}{v_{S1}} \right) \right], \end{aligned}$$

где  $A_P(\alpha_0), A_S(\alpha_0)$  – зависящие от угла падения  $\alpha_0$  коэффициенты отражения для продольной и поперечной отражённых волн. Поле  $\mathbf{u}_{P'} = \mathbf{1}_x \cdot u_{P'} + \mathbf{1}_z \cdot w_{P'}$ .

Примем во внимание то, что перемещение  $\Delta l_P'$  по направлению  $l_P'$  связано с изменением координат  $\Delta x > 0$ ,  $\Delta z < 0$  следующими равенствами:  $\Delta l_P' = \Delta x \cdot \sin \alpha_1 - \Delta z \cdot \cos \alpha_1$  (см. [рис. 9.17, б](#)). Поэтому для поля  $\mathbf{u}_P'$  получаем следующее выражение:

$$\check{\mathbf{u}}_P' = \mathbf{1}_{l_P'} \cdot A_P(\alpha_0) \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{x \cdot \sin \alpha_1 - z \cdot \cos \alpha_1}{v_{P1}} \right) \right].$$

Чтобы получить выражения для декартовых компонент этого поля примем во внимание, что  $x$ - компонента  $u_P' = |\mathbf{u}_P'| \cdot \sin \alpha_1$ ,  $z$ - компонента  $w_P' = -|\mathbf{u}_P'| \cdot \cos \alpha_1$ . Поэтому для этих компонент справедливы выражения:

$$\left. \begin{aligned} \check{u}_P' &= A_P(\alpha_0) \cdot \sin \alpha_1 \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{x \cdot \sin \alpha_P - z \cdot \cos \alpha_P}{v_{P1}} \right) \right], \\ \check{w}_P' &= -A_P(\alpha_0) \cdot \cos \alpha_1 \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{x \cdot \sin \alpha_P - z \cdot \cos \alpha_P}{v_{P1}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (9.154')$$

Подобные равенства можно получить для декартовых компонент  $u_S'$ ,  $w_S'$  отражённой поперечной волны (поля  $\mathbf{u}_S'$ ). Эти выражения содержат множитель  $A_S(\alpha_0)$  – зависящий от угла падения  $\alpha_0$  коэффициент отражения для этой ( $P$ - $S$ ) волны. После этого не сложно получить выражения для двух ненулевых декартовых компонент  $u$  и  $w$  поля смещений в ("верхнем") полупространстве  $V_1$ :  $u^{(1)} = u_P^0 + u_P' + u_S'$ ,  $w^{(1)} = w_P^0 + w_P' + w_S'$ .

В полупространстве  $V_2$  поле смещений  $\mathbf{u}^{(2)}$  – сумма проходящих продольной и поперечной волн:  $\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}_P'' + \mathbf{u}_S'' = \mathbf{1}_x \cdot (u_P'' + u_S'') + \mathbf{1}_z \cdot (w_P'' + w_S'')$ , где поле проходящей продольной ( $P$ - $P$ ) волны пропорционально коэффициенту прохождения  $B_P$ , а поле проходящей поперечной ( $P$ - $S$ ) волны пропорционально коэффициенту прохождения  $B_S$ . Выражение для поля смещений  $\mathbf{u}_P''$  проходящей продольной ( $P$ - $P$ ) волны в полупространстве  $V_2$  можем представить в виде:

$$\check{\mathbf{u}}_P'' = \mathbf{1}_{l_P''} \cdot \check{u}_P'', \quad \check{u}_P'' = B_P(\alpha_0) \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{l_P''}{v_{P2}} \right) \right],$$

где  $B_P(\alpha_0)$  – коэффициент прохождения для  $P$ - $P$  волны, а  $x$  – компоненту  $u_P''$  и  $z$  – компоненту  $w_P''$  поля  $\mathbf{u}_P''$  определяют выражения (см. [рис. 9.17, в](#)):

$$\left. \begin{aligned} \check{u}_P'' &= B_P(\alpha_0) \cdot \sin \alpha_2 \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{x \cdot \sin \beta_P + z \cdot \cos \beta_P}{v_{P2}} \right) \right], \\ \check{w}_P'' &= B_P(\alpha_0) \cdot \cos \alpha_2 \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{x \cdot \sin \beta_P + z \cdot \cos \beta_P}{v_{P2}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (9.154'')$$

Таким же способом можем получить выражения для  $x$ - компоненты  $u_S''$  и  $z$ - компоненты  $w_S''$  поля смещений  $\mathbf{u}_S''$  проходящей поперечной волны в полупространстве  $V_2$ . Выражения для этих компонент содержат множитель  $B_S(\alpha_0)$  – коэффициент прохождения для  $P$ - $S$  волны.

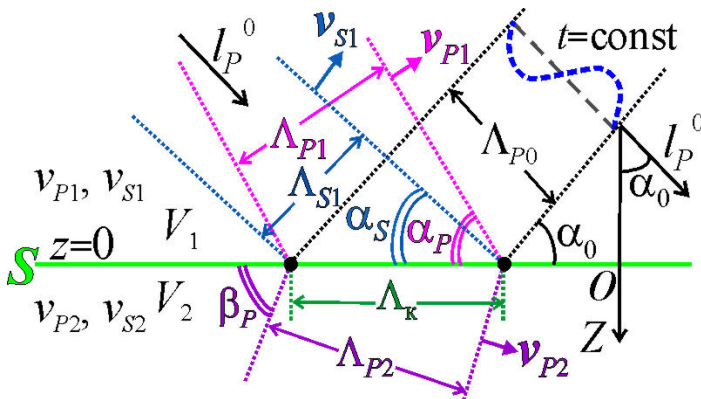
Из 4-х граничных условий (непрерывность поля смещений и непрерывность упругих напряжений) на границе  $S$  ( $z=0$ ) в соответствии с (9.21),

(9.22), получаем систему 4-х уравнений.

$$\left. \begin{aligned} &\text{При } z=0: \text{ а) } u^{(2)} = u^{(1)}, \text{ б) } w^{(2)} = w^{(1)}, \\ &\text{в) } \lambda_2 \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}^{(2)} + 2\mu_2 \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = \lambda_1 \cdot \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} + 2\mu_1 \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z}, \\ &\text{г) } \mu_2 \left( \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} \right) = \mu_1 \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (9.155)$$

где (при  $y$ -компоненте  $v^{(1,2)}$  полей  $\mathbf{u}^{(1,2)}$  равной нулю) производная  $\operatorname{div} \mathbf{u}^{(1,2)} = \frac{\partial u^{(1,2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(1,2)}}{\partial z}$ . Но в выражениях вида (9.154'), (9.154'')

неизвестных величин не 4, а 8. Это – коэффициенты  $A_P, A_S, B_P, B_S$  и углы  $\alpha_P, \alpha_S, \beta_P, \beta_S$ . Для определения всех этих неизвестных, помимо 4-х уравнений (9.155), нужны ещё 4 уравнения. Какие?



**Рис. 9.18.**

К закону Снеллиуса

На рис. 9.18 пунктирными линиями показаны пересечения с плоскостью рисунка 2-х пар синфазных поверхностей нескольких волн при различии фаз этих волн на  $2\pi$ . То есть расстояния между двумя синфазными поверхностями (для каждой из волн) равны длинам  $\Lambda$  волн. На этом же рисунке (чёрным цветом) показаны точки на границе  $S$ , в которых пары таких синфазных

поверхностей касаются этой границы. Расстояние между этими точками – кажущаяся длина волны  $\Lambda_k$  на границе  $S$ . Если в фиксированный момент времени  $t$  на границе  $S$  компоненты поля падающей волны равны нулю ( $u_P^0=0, w_P^0=0$ ), то в этот же момент времени на  $S$  равны нулю также компоненты отражённых и проходящих волн ( $u_P'=0, w_P'=0, u_P''=0, w_P''=0, u_S'=0, w_S'=0, u_S''=0, w_S''=0$ ). Это обусловлено тем, что в этот момент времени и в этих точках границы  $S$  падающая волна не возбуждает отражённые и проходящие волны. То есть на плоскости  $S$  кажущаяся длина волны  $\Lambda_k$  должна быть одинаковой для всех пяти волн. Как видно на рис. 9.18, это означает, что

$$\Lambda_k = \frac{\Lambda_P^0}{\sin \alpha_0} = \frac{\Lambda'_P}{\sin \alpha_P} = \frac{\Lambda'_S}{\sin \alpha_S} = \frac{\Lambda''_P}{\sin \beta_P} = \frac{\Lambda''_S}{\sin \beta_S}. \quad (9.156)$$

Примем во внимание, что скорость  $v = \Lambda \cdot f = \omega \cdot \Lambda / (2\pi)$ , где  $2\pi f = \omega$  – круговая частота. Отсюда следует, что  $\Lambda = v/f = 2\pi \cdot v / \omega$ . Так как в рассматриваемом случае частоты всех волн одинаковы, то длина каждой волны пропорциональна её скорости и из равенств (9.156) получаем закон Снеллиуса:

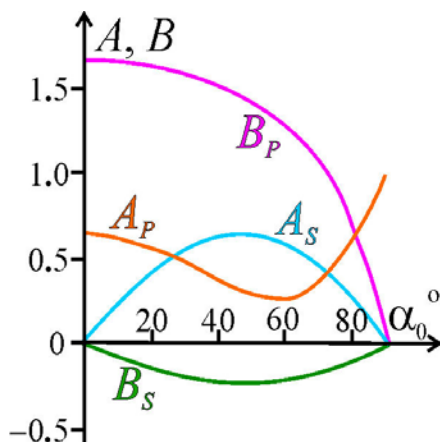
$$\frac{\sin \alpha_0}{v_{P1}} = \frac{\sin \alpha_P}{v_{P1}} = \frac{\sin \alpha_S}{v_{S1}} = \frac{\sin \beta_P}{v_{P2}} = \frac{\sin \beta_S}{v_{S2}}. \quad (9.157)$$

Итак, при наклонном падении плоской продольной  $P$ -волны на плоскую поверхность раздела образуются четыре вторичные или как их иначе называют, сопряжённые волны – две продольные ( $P$ - $P$ ) и две поперечные ( $P$ - $S$ ). Аналогичным образом при наклонном падении на границу поперечной  $S$ -волны "возникают" две  $S$ - $S$  волны и две  $S$ - $P$  волны. Волны того же типа, что и падающая волна, называют *монотипными*, а сопряжённые волны иного типа, чем падающая волна, называют *обменными*.

При известных угле падения  $\alpha_0$  и скоростях  $v_{P1}$ ,  $v_{S1}$ ,  $v_{P2}$ ,  $v_{S2}$  из (9.157) не сложно выразить через  $\alpha_0$  и отношения скоростей углы  $\alpha_P$ ,  $\beta_P$ ,  $\alpha_S$ ,  $\beta_S$ . Из этого выражения получаем, в частности, следующее. Для отражённой  $P$ - $P$  волны угол  $\alpha_P = \alpha_0$  ("угол отражения равен углу падения"). О других следствиях из равенств (9.157) будет сказано позже.

Вычисление коэффициентов отражения и прохождения путём решения системы (9.155) при учёте соотношений (9.157) показывает, что коэффициенты  $A_P$ ,  $B_P$ ,  $A_S$ ,  $B_S$  сложным образом зависят от угла падения  $\alpha_0$ , соотношений упругих констант и плотностей.

На **рис. 9.19** в качестве примера приведены зависимости от  $\alpha_0$  коэффициентов отражения и прохождения для случая, когда продольная волна "падает" из среды с **большой** акустической жёсткостью на среду с **меньшей** акустической жёсткостью ( $\rho_1 = 2.7 \text{ г/см}^3$ ;  $v_{P1} = 4.5 \text{ км/с}$ ;  $v_{S1} = 2.2 \text{ км/с}$ ;  $\rho_2 = 0.9 \text{ г/см}^3$ ;



**Рис. 9.19.**

Пример зависимости от угла  $\alpha_0$  коэффициентов отражения и прохождения

Как видно, на этом рисунке, при небольших величинах угла  $\alpha_0$  – от нуля до 20 коэффициенты отражения и прохождения продольных волн  $A_P$  и  $B_P$  меняются незначительно. Подобная закономерность наблюдается и при других соотношениях скоростей и плотностей контактирующих сред. Поперечные обменные волны в рассматриваемом случае достигают максимальной интенсивности при углах падения 40 – 60°. При нормальном падении ( $\alpha_0 = 0$ ) и при  $\alpha_0 = 90^\circ$  коэффициенты  $A_S$  и  $B_S$  равны нулю. Другие примеры зависимостей коэффициентов  $A_P$ ,  $B_P$  от угла  $\alpha_0$  приведены, например, в книге [Рябинкин, 1986].

Так как при заданных упругих параметрах среды скорость поперечных волн меньше скорости продольных волн ( $v_{S1} < v_{P1}$  и  $v_{S2} < v_{P2}$ ), то  $\alpha_S < \alpha_P$  (см. **рис. 9.18**) и  $\beta_S < \beta_P$ .

Согласно (9.157)  $\frac{\sin \alpha_0}{v_{P1}} = \frac{\sin \beta_P}{v_{P2}}$ , то есть  $\sin \beta_P = \frac{v_{P2}}{v_{P1}} \sin \alpha_0$ . Если скорость

$v_{P2} > v_{P1}$ , то угол прохождения  $\beta_P$  больше угла падения  $\alpha_0$  продольной волны. При определённом значении  $i_P$  острого угла  $\alpha_0$   $\sin \beta_P = 1$  и угол  $\beta_P$  равен  $90^\circ$ . Из

(9.157) следует, что при этом условии  $\frac{v_{P2}}{v_{P1}} \sin i_P = 1$ , то есть

$$\sin i_P = \frac{v_{P1}}{v_{P2}}. \quad (9.158)$$

Угол  $i_P$  называют углом *внутреннего отражения*, или *критическим углом*.

При  $\alpha_0 = i_P$  в области  $V_2$  вдоль границы  $S$  будет распространяться со скоростью  $v_{P2}$  продольная волна. В сейсморазведке именно такую волну называют *преломлённой*. Распространяясь в области  $V_2$  вдоль границы эта волна возбуждает в области  $V_1$  "головные" волны. На этом основан метод преломлённых волн (МПВ) в сейсморазведке.

Аналогичное явление проявляется в случае проходящей поперечной волны при условии  $v_{S2} > v_{S1}$  и угле падения  $\alpha_0 = i_S$ , где

$$\sin i_S = \frac{v_{S1}}{v_{S2}}. \quad (9.159)$$

Если угол  $\alpha_0 > i_{P(S)}$ , т. е. угол падения  $\alpha_0$  больше критического угла, то функции  $\sin \beta_P$  ( $\sin \beta_S$ ) должны быть больше единицы. Это возможно, если принять допущение, что угол  $\beta_P$  (или  $\beta_S$ ) – комплексная величина, т. е. например,  $\beta_P = \beta' + i \cdot \beta''$ . Полагая  $\beta' = \pi/2$ , имеем в соответствии с (9.86)

$$\sin \beta = \operatorname{ch} \beta'' \geq 1, \quad \cos \beta = -i \cdot \operatorname{sh} \beta''. \quad (9.160)$$

Уравнение продольной преломлённой волны в этом случае вместо (9.154") принимает вид

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\mathbf{u}}_P'' &= \mathbf{1}_{l_P''} \cdot B_P(\alpha_0) \cdot a_0 \cdot \exp \left[ i\omega \cdot \left( t - \frac{x \cdot \operatorname{ch} \beta'' - i \cdot z \cdot \operatorname{sh} \beta''}{v_{P2}} \right) \right] = \\ &= \mathbf{1}_{l_P''} \cdot B_P(\alpha_0) \cdot a_0 \cdot \exp(-k \cdot z \cdot \operatorname{sh} \beta'') \cdot \exp(-i \cdot k \cdot x \cdot \operatorname{ch} \beta'') \cdot \exp(i \cdot \omega t) = \\ &= \mathbf{1}_{l_P''} \cdot B_P(\alpha_0) \cdot a_0 \cdot \exp(-k \cdot z \cdot \operatorname{sh} \beta'') \cdot [i \cdot (\omega t - k \cdot x \cdot \operatorname{ch} \beta'')]. \end{aligned} \quad (9.161)$$

Таким образом, проходящая волна при условии  $\alpha_0 > i_P$  представляет собой плоскую неоднородную волну (см. § 2), распространяющуюся в полупространстве  $V_2$  в направлении, параллельном границе  $S$ . Амплитуда такой волны экспоненциально убывает в направлении, ортогональном преломляющей границе  $S$ .

При углах  $\alpha_0 > i_{P(S)}$  коэффициенты прохождения и отражения также становятся комплексными. То есть в этом случае коэффициенты отражения и прохождения можно представить в виде  $A = A' \cdot \exp(i \cdot A'')$ , где  $A'$  и  $A''$  – действительные величины. Комплексность этих коэффициентов означает, что при отражении и преломлении на границе  $S$  начальные фазы соответствующих компонент поля падающей, отражённой и проходящей волн не одинаковы.

Особый интерес представляет частный случай, когда плоская продольная волна падает на поверхность раздела по нормали, т. е. под углом  $\alpha_0 = 0$  (см. раздел II). Из уравнения (9.148) следует, что коэффициенты  $A_S$ ,  $B_S$  для отраженной и проходящей поперечных волн в данном случае равны нулю, т. е.

$$A_S = B_S = 0. \quad (9.162)$$

Следовательно, при нормальном падении плоской продольной волны на поверхность раздела поперечных волн не образуется. Это следует и из очевидных физических соображений. При нормальном падении продольной волны возникают только нормальные напряжения и деформации сжатия – растяжения, а деформации сдвига и тангенциальные смещения, которыми сопровождается распространение поперечных упругих волн, отсутствуют.

В соответствии с (9.148) при  $\alpha_0 = 0$

$$A_P = \frac{Z_{P1} - Z_{P2}}{Z_{P1} + Z_{P2}} = \frac{\rho_1 \cdot v_{P1} - \rho_2 \cdot v_{P2}}{\rho_1 \cdot v_{P1} + \rho_2 \cdot v_{P2}}, \quad B_P = \frac{2 \cdot Z_{P1}}{Z_{P1} + Z_{P2}} = \frac{2 \cdot \rho_1 \cdot v_{P1}}{\rho_1 \cdot v_{P1} + \rho_2 \cdot v_{P2}}. \quad (9.163)$$

Как следует из выражений (9.163), для образования отражённой волны необходимо различие в акустических жёсткостях (волновых сопротивлениях) контактирующих сред, т. е. нужно, чтобы выполнялось неравенство  $\rho_2 \cdot v_{P2} \neq \rho_1 \cdot v_{P1}$ . Границы  $S$ , где существует такое различие между акустическими жёсткостями  $Z_{P1}, Z_{P2}$ , называют *отражающими границами*. В зависимости от степени различия акустических жёсткостей можно говорить о "сильных" и "слабых" отражающих границах. При большом контрасте  $Z_{P1}, Z_{P2}$ , на "сильной границе" интенсивность отраженной волны значительна. При малом контрасте величин  $Z_{P1}, Z_{P2}$ , на слабой границе интенсивность отраженной волны (по сравнению с падающей волной) – невелика.

При отражении волны от среды с меньшей акустической жёсткостью, то есть при  $\rho_2 \cdot v_{P2} < \rho_1 \cdot v_{P1}$ , коэффициент отражения положителен. Это означает, что на границе  $S$  фаза отраженной волны совпадает с фазой падающей волны. Если, например, в некоторый момент времени  $t$  зона сжатия падающей волны достигла границы  $S$ , то в этот же момент  $t$  происходит отражение от этой границы также зоны сжатия. Если в падающей волне на границе мы наблюдаем зону растяжения, то в этот же момент времени возникает зона разряжения отражённой волны. Если же отражение происходит от среды с большим волновым сопротивлением ( $\rho_2 \cdot v_{P2} > \rho_1 \cdot v_{P1}$ ), то коэффициент отражения  $A_P$  отрицателен. Это означает, что при отражении происходит изменение фазы на  $180^\circ$ , так называемая «потеря полуволны». Вместо пришедшей к границе зоны сжатия отражается зона растяжения, и наоборот.

Отметим, что хотя выражения (9.163), определяющие коэффициенты отражения и прохождения  $A_P$  и  $B_P$ , получены для случая нормального падения плоской продольной волны ( $\alpha_0 = 0$ ), выражениями (9.163) можно пользоваться и для оценок этих коэффициентов при наклонном падении  $P$ -волны при небольших углах  $\alpha_0$ . Как уже упоминалось выше, при пределах изменения угла падения  $\alpha_0$  от 0 до  $20^\circ$  коэффициенты  $A_P$  и  $B_P$  меняются незначительно (см. [рис. 9.19](#)).

## V. Поверхностные волны Релея

Следует различать волны объёмные, наблюдающиеся в процессе



распространения в любой точке пространства, окружающего источник, и волны поверхностные, образующиеся благодаря присутствию поверхности раздела и существующие вблизи неё. К последним относится поверхностная волна, возникающая у свободной поверхности упругой среды. Её существование было теоретически доказано английским физиком Дж. Релеем.

Пусть однородная упругая среда с параметрами  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  занимает нижнее полупространство. Начало декартовых координат находится на его поверхности – плоскости  $S$ . Ось  $X$  направлена вдоль этой плоскости, а ось  $Z$  – вглубь упругой среды. Будем полагать, что колебания изменяются во времени по гармоническому закону и их распределение в пространстве не зависит от координаты  $y$ , т. е. мы рассматриваем "плоскую" задачу. Предположим, что вдоль поверхности  $S$  в направлении  $X$  распространяется поверхностная волна, которая представляет собой комбинацию (наложение) двух плоских неоднородных волн – продольной и поперечной, распространяющихся по оси  $X$  с одинаковой скоростью  $v_R$ . Так как речь идёт не об истинных скоростях объёмных продольных и поперечных волн  $v_P$  и  $v_S$ , а о кажущейся скорости вдоль направления  $X$ , такое предположение, как мы увидим ниже, может быть удовлетворено.

Таким образом, задача сводится к построению решения уравнений (9.14) и (9.15) в виде выражений для неоднородных плоских продольной и поперечной волн вида (9.87) с таким выбором коэффициентов, чтобы скорость этих волн вдоль поверхности раздела была бы одинаковой, и последующему определению этой скорости. Искомые коэффициенты найдём путем, удовлетворения условий сопряжения на поверхности раздела:

Итак, в случае гармонически меняющегося поля и при применении комплексной записи будем искать решение уравнений в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= a \cdot \exp(-r \cdot z) \cdot \exp[i \cdot \omega(t - x/v_R)], \\ \psi &= b \cdot \exp(-s \cdot z) \cdot \exp[i \cdot \omega(t - x/v_R)], \end{aligned} \quad (9.164)$$

где  $v_R$  – скорость распространения продольной и поперечной неоднородных волн,  $\varphi$  – скалярный потенциал поля смещений, а  $\psi_y = \psi$  – ненулевая  $y$ -компонента векторного потенциала.

Будем полагать, что в (9.164) коэффициенты  $r > 0$  и  $s > 0$ . Подставляя (9.164) в (9.14) и (9.15), получаем после некоторых преобразований

$$r = \frac{\omega}{v_R} \sqrt{1 - v_R^2/v_P^2}, \quad s = \frac{\omega}{v_R} \sqrt{1 - v_R^2/v_S^2}. \quad (9.165)$$

Для определения скорости  $v_R$  поверхностной волны обратимся к условиям сопряжения (9.20) - (9.22). При записи этих условий для свободной поверхности необходимо учесть следующие обстоятельства. Смещение упругой среды на границе ничем не ограничено и условия (9.22) здесь вообще неприменимы. Условия (9.20) равенства напряжений на площадках по обе стороны поверхности раздела сводятся в данном случае к равенству нулю составляющих, напряжений по осям  $X$  и  $Z$  при  $z=0$ , т. е.

$$\tau_{xz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_z|_{z=0} = 0. \quad (9.166)$$

Пользуясь (8.65), (8.67), выразим напряжения через деформации, а последние – через потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ . При этом учтём, что в рассматриваемом случае компоненты векторного потенциала  $\psi_x=0$ ,  $\psi_z=0$ . Вследствие этого условия (9.166) принимают следующий вид:

$$\left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right]_{z=0} = 0, \quad (9.167)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left( 1 - 2 \frac{v_S^2}{v_P^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{v_S^2}{v_P^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right]_{z=0} = 0.$$

Подставляя в (9.167) выражения для  $\varphi$  и  $\psi_y=\psi$  из (9.164), (9.165) и произведя преобразования, получаем следующие уравнения:

$$\left( 2 - v_R^2/v_S^2 \right) \cdot a + 2 \cdot i \cdot \sqrt{1 - v_R^2/v_S^2} \cdot b = 0, \quad (9.168)$$

$$2 \cdot i \cdot \sqrt{1 - v_R^2/v_P^2} \cdot a - \left( 2 - v_R^2/v_S^2 \right) \cdot b = 0.$$

Выражения (9.168) образуют линейную однородную систему уравнений. Она имеет отличное от нуля решение относительно  $a$  и  $b$ , если определитель системы  $D$  равен нулю:

$$D = \left( 2 - \frac{v_R^2}{v_S^2} \right)^2 - 4 \cdot \sqrt{\left( 1 - \frac{v_R^2}{v_P^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{v_R^2}{v_S^2} \right)} = 0. \quad (9.169)$$

Введя обозначения

$$k = v_R^2/v_S^2, \quad n = v_S^2/v_P^2, \quad (9.170)$$

можем переписать (9.169) в виде:

$$D = (2 - k)^2 - 4 \cdot \sqrt{(1 - k) \cdot (1 - k \cdot n)} = 0. \quad (9.171)$$

После преобразований получаем из (9.171) уравнение для  $k$ :

$$k^3 - 8 \cdot k^2 + (24 - 16 \cdot n) \cdot k - 16 \cdot (1 - n) = 0. \quad (9.172)$$

Уравнение (9.172) позволяет определить  $k$ , а затем определить  $v_R$  – скорость поверхностной волны Релея, которая является функцией скоростей  $v_P$  и  $v_S$  продольных и поперечных волн. Уравнение (9.172) обязательно имеет вещественный корень в интервале  $0 < k < 1$ . Следовательно, волна Релея всегда может существовать.

Расчёты показывают, что поверхностная волна Релея распространяется со скоростью около  $0.9 \cdot v_S$ . Эта скорость не зависит от частоты и поэтому колебания сложного вида (которые в соответствии с интегралом Фурье можно представить суммой гармонических колебаний) распространяются в виде поверхностной волны без искажения формы.

Компоненты вектора смещения продольной волны по осям  $X$  и  $Z$  в соответствии с (9.7) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{u} = \frac{\partial \overset{\vee}{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial \overset{\vee}{\psi}}{\partial z} = & - \left[ a \cdot \frac{i\omega}{v_R} \cdot \exp(-r \cdot z) - s \cdot b \cdot \exp(-s \cdot z) \right] \times \\ & \times \exp[i\omega \cdot (t - x/v_R)], \end{aligned} \quad (9.173)$$

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{w} = \frac{\partial \overset{\vee}{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial \overset{\vee}{\psi}}{\partial x} = & - \left[ a \cdot r \cdot \exp(-r \cdot z) + \frac{i\omega}{v_R} \cdot b \cdot \exp(-s \cdot z) \right] \times \\ & \times \exp[i\omega \cdot (t - x/v_R)]. \end{aligned}$$

Прежде чем произвести некоторые преобразования выражений (9.173), заметим, что из (9.168) и (9.170) следует равенство

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot i \cdot \sqrt{1 - k \cdot n}}{2 - k} = 2 \cdot i \cdot c. \quad (9.174)$$

Выражения (9.165) для  $r$  и  $s$ , учитывая, что длина волны  $\Lambda_R = 2\pi \cdot v_R / \omega$  и равенства (9.164), можно представить в виде

$$r = \frac{2\pi}{\Lambda_R} \sqrt{1 - k \cdot n}, \quad s = \frac{2\pi}{\Lambda_R} \sqrt{1 - k}. \quad (9.175)$$

Подставляя (9.174) и (9.175) в (9.173), получаем следующие выражения для компонент вектора смещения:

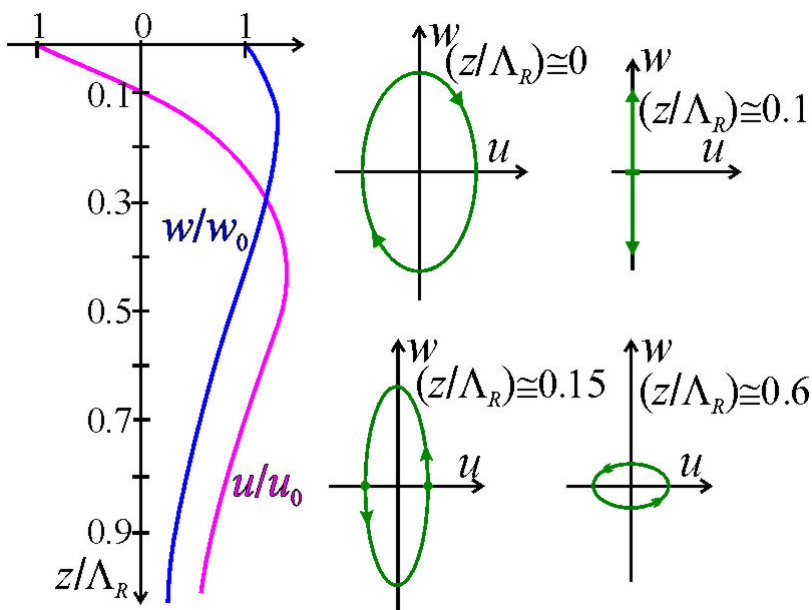
$$\begin{aligned} \overset{\vee}{u} = & -i \cdot a \cdot \left[ \frac{\omega}{v_R} \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1 - k \cdot n}}{\Lambda_R} \cdot z\right) - \right. \\ & \left. - 2 \cdot c \cdot s \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1 - k}}{\Lambda_R} \cdot z\right) \right] \cdot \exp[i\omega \cdot (t - x/v_R)], \end{aligned} \quad (9.176)$$

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{w} = & a \cdot \left[ r \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1 - k \cdot n}}{\Lambda_R} \cdot z\right) - \right. \\ & \left. - \frac{2 \cdot c \cdot \omega}{v_R} \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1 - k}}{\Lambda_R} \cdot z\right) \right] \cdot \exp[i\omega \cdot (t - x/v_R)]. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Эйлера (6.47"), согласно которой  $\text{Re}[\exp(i \cdot \beta)] = \cos(i \cdot \beta)$ , перейдём к записи компонент  $u$ ,  $w$  поля вектора смещения в действительной форме. Примем также во внимание, что  $-i = \exp(-i \cdot \pi/2)$  (см. рис. 6.9 в главе шестой). Согласно (9.176)

$$\begin{aligned}
 u &= a \cdot \left[ \frac{\omega}{v_R} \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-k \cdot n}}{\Lambda_R} \cdot z\right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \cdot c \cdot s \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-k}}{\Lambda_R} \cdot z\right) \right] \cdot \sin[\omega \cdot (t - x/v_R)], \\
 w &= a \cdot \left[ r \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-k \cdot n}}{\Lambda_R} \cdot z\right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2 \cdot c \cdot \omega}{v_R} \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{1-k}}{\Lambda_R} \cdot z\right) \right] \cdot \cos[\omega \cdot (t - x/v_R)].
 \end{aligned}
 \tag{9.177}$$

Гармонические колебания частиц происходят в вертикальной плоскости, ориентированной в направлении  $X$  распространения волны. Из формул (9.177) следует, что колебания по направлениям осей  $X$  и  $Z$  различаются по фазе на  $90^\circ$  и имеют разные амплитуды. Следовательно, частицы среды в процессе колебаний перемещаются по эллипсам. Амплитуда колебаний убывает с глубиной по экспоненциальному закону. Коэффициенты, определяющие



**Рис. 9.20.**

Распределение смещений в поверхностной волне Релея

изображены зависимости от отношения  $z/\Lambda_R$  амплитуд вертикальной и горизонтальной составляющих смещения, в долях соответствующих компонент смещений в плоскости  $z=0$  ( $u/u_0$  и  $w/w_0$ ). Амплитуда вертикальной составляющей смещения  $w$  имеет на некоторой глубине максимум, а горизонтальная составляющая  $u$  на определённой глубине меняет свой знак на противоположный. Вследствие этого изменяется эксцентриситет (отношение осей эллипсов) эллиптических орбит, и на некоторой глубине, изменяется направление движения частиц по эллиптической орбите.

В случае точечного источника (расположенного в начале  $O$

скорость убывания амплитуд, обратно пропорциональны длине волны. Поэтому, чем больше длина волны, тем глубже она проникает в упругую среду.

Анализ выражений (9.177) показывает, что поверхностная волна практически сосредоточена в слое, толщина которого имеет порядок  $\Lambda_R$ . Амплитуда смещения по каждой из осей с глубиной  $z$  меняется по-разному. Как видно на **рис. 9.20**, на котором

цилиндрических координат с осью  $Z$ ) фронт волны будет представлять собой цилиндрическую поверхность  $r=\text{const}$ . В такой цилиндрической волне Релея в плоскости  $z=0$  амплитуда смещений убывает обратно пропорционально  $\sqrt{r}$ , а в "обычных" объёмных волнах – обратно пропорционально  $r$ . Поэтому интенсивность поверхностных волн Релея при большом удалении от источника может быть значительно выше, чем у объёмных волн. В связи с этим волны Релея представляют наибольшую опасность при землетрясениях.

## Приложение

### ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ СГС

Вид формул в теории электрических и магнитных полей зависит от выбора системы физических единиц. В настоящей книге формулы составлены применительно к единицам СИ. Удобно иметь возможность привести формулы к виду, соответствующему системе СГС, получившей широкое применение в физической и геофизической литературе. Подстановки, указанные в приводимой таблице, позволяют выполнить переход от СИ к СГС для равенств (или неравенств), встречающихся в шести главах (от второй до седьмой).

В таблице некоторые особенности имеют подстановки (разделы): 1 – 6, 7 – 11, 12 – 18, 17 – 26. Подстановок 1 – 6 достаточно для преобразования равенств, встречающихся во второй главе. Для третьей и четвертой глав надо применять подстановки 1 – 6 и 7 – 11. Для пятой главы нужны подстановки 1 – 6, 7 – 11, 12 – 16, а для шестой и седьмой глав – все приведенные в таблице подстановки.

Пользуясь этой таблицей, надо иметь в виду следующее.

1. Таблица применима только к равенствам. Она, как правило, не применима к отдельно взятой части равенства или к выражению, приведенному где-либо вне равенства с другим выражением.

2. Некоторые подстановки являются следствиями других подстановок. Например, подстановки 13 и 14 следуют из подстановки 12, а из подстановки 17 получаем подстановки 18, 19 и др.

3. Из некоторых подстановок следуют другие подстановки, не указанные в таблице. Например, из подстановок 1, 2 ясно, что вместо произведения  $\epsilon_0 \cdot \mu_0$  надо подставить единицу.

4. Подстановки надо применять не только к величинам, представленным обозначениями, но также к численным значениям и размерностям этих величин. Подстановки могут обратить равенства в тождества.

5. Таблицу следует рассматривать только как искусственное средство для преобразования равенств из СИ в СГС. Рекомендация подстановки одной величины вместо другой не означает, что эти величины соответствуют друг другу в системах СИ и СГС.

Таблица подстановок

Номер подстановки	Заменяемая величина	Подставляемая величина	Номер подстановки	Заменяемая величина	Подставляемая величина
1	$\varepsilon_0$	$1/4\pi$	7	$\varepsilon_a$	$\varepsilon/4\pi$
2	$\mu_0$	$4\pi$	8	$\mu_a$	$4\pi \cdot \mu$
3	<b>H</b>	<b>H/4π</b>	9	<b>D</b>	<b>D/4π</b>
4	$U^H$	$U^H/4\pi$	10	$\chi$	$4\pi \cdot \chi$
5	$\mathcal{E}^H$	$\mathcal{E}^H/4\pi$	11	$\varkappa$	$4\pi \cdot \varkappa$
6	$v$	1			

Номер подстановки	Заменяемая величина	Подставляемая величина	Номер подстановки	Заменяемая величина	Подставляемая величина
12	<b>j, j'</b>	<b>j/c, j'/c</b>	17	$\tau$	$c \cdot \tau$
13	<b>i, i'</b>	<b>i/c, i'/c</b>	18	$f$	$f/c$
14	$U_I$	$U_I/4\pi$	19	$\omega$	$\omega/c$
15	<b>w</b>	<b>w/c</b>	20	$c$	1
16	$t$	$c \cdot t$	21	$T$	$c \cdot T$
			22	$R$	$c \cdot R$
			23	$v$	$v/c$
			24	$\gamma, \rho$	$\gamma/c, c \cdot \rho$
			25	$P, Q$	$P/c, Q/c$
			26	<b>Y</b>	<b>Y/c</b>

**Примечания.**  $v$  (ню) – множитель в законе Кулона - Ньютона;  $\chi$  (хи),  $\varkappa$  (каппа) (в подстановках 10, 11) – диэлектрическая и магнитная восприимчивости; **w** – скорость движения заряда или контура тока;  $t$  (или  $\tau$ ) – время (или время релаксации);  $f$  (или  $\omega$ ) – частота (или круговая частота);  $c$  – электродинамическая постоянная;  $T$  – период;  $R$  – сопротивление;  $\gamma$  – удельная электропроводность;  $P$  и  $Q$  – сторонняя работа в области  $V$  и джоулева тепло, выделяющееся в этой области;  $v$  – абсолютная величина скорости распространения электромагнитного поля.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В "электронной" версии Учебника пять частей (I, II, III, IV, V) и в каждой части – "отдельная" нумерация страниц. Поэтому для этой версии в предметном указателе пришлось обозначать ссылки так.

РИМСКАЯ ЦИФРА (№ ЧАСТИ)/ ЧИСЛО АРАБСКИМИ ЦИФРАМИ (№ СТРАНИЦЫ).

Например, **V/ 25** – часть V, стр. 25 или **I/ 3, 7, 11** – часть I, стр. 3, 7, 11.

Обратим внимание некоторых студентов – граждан Российской Федерации – на то, что в этом "Предметном указателе" последовательность "терминов" отвечает *русскому алфавиту* и первое слово в списке – *имя существительное в именительном падеже*.

\*\*\*

- Амплитуда действительная, комплексная **IV/ 36, 38, 47**
- Вектор вращения **V/ 36**
- Герца **IV/ 63**
- комплексный **IV/ 41**
- Умова - Пойнтинга **IV/ 20**
- упругого напряжения **V/ 7**
- Вихри **I/ 26, 74**
- Возбудители поля **I/ 70, 75**
- Волны упругие плоские
- монотипные, обменные **V/ 84**
- — неоднородные **V/ 52 - 56, 85 -87**
- — однородные **IV/ 47, 51, 80, V/ 52, 76, 78, 80**
- — поверхностные Релея **V/ 87**
- — поперечные **V/ 35, 48, - 52, 78**
- — продольные **V/ 35, 40, - 47, 53, 76, 80**
- — сферические поперечные **V/ 48, 56**
- — сферические продольные **V/ 40, 56**
- электромагнитные плоские **IV/ 23, 47, 51, 80**
- электромагнитные сферические **IV/ 76, 80, 95**
- Восприимчивость диэлектрическая, магнитная **II/ 79**
- Время релаксации **IV/ 26**
- Выражение напряжений через деформации **V/ 30**
- Глубина проникновения **IV/ 49, V/ 90**
- Годограф электромагнитного поля **IV/ 16**
- Градиент **I/ 23, 40, 52**
- двумерный **I/ 43, 54**
- поверхностный **I/ 58**
- Дельта-функция **III/ 59, 104, IV/ 57**
- Деформации **V/ 11, 17, 20**
- главные **V/ 23**
- сдвига **V/ 22, 29, 31, 48, 52**
- сжатия - растяжения **V/ 14, 23, 28, 37, 46**



- Дивергенция **I/ 24, 43, 49**  
 — градиента **I/ 61**  
 — двухмерная **I/ 59**  
 — поверхностная **I/ 56, 59**  
 — ротора **I/ 65**  
 Дилатация **V/ 346**  
 Диполь постоянный, его поле **II/ 30, 39, 64, 69, 77, III/ 58, 88**  
 — переменный магнитный **IV/ 76, 85**  
 — переменный электрический **IV/ 69, 96**  
 — постоянный магнитный в случае магнитного поля тока **III/ 87**  
 — и двойной слой под действием поля **III/ 63**  
 Дисперсия частотная **IV/ 44, 51**  
 Дифференцирование ортов **I/ 98**  
 Длина волны **IV/ 25, 32, 48, V/ 73, 83, 89**  
 Единственность решения прямой задачи **I/ 80, 86, II/ 52, 102,**  
 — — — — — **III/ 59, 99 IV/ 58 61, V/ 38**  
 Ёмкость уединенного проводника **II/ 107**  
 — — электрода **III/ 67**  
 Жёсткость акустическая **V/ 77, 84, 86**  
 Задача Дирихле **I/ 86**  
 — краевая **I/ 78, 80, 86**  
 — Неймана **I/ 86**  
 Задачи прямая и обратная **I/ 76**  
 Закон Ампера **III/ 72**  
 — Био - Савара - Лапласа **III/ 77**  
 — Гаусса **II/ 22, 41**  
 — Гука **V/ 25**  
 — Джоуля - Ленца **III/ 31**  
 — полного тока **III/ 82, 97, IV/ 12**  
 — Кирхгофа **III/ 20**  
 — Кулона - Ньютона **II/ 11**  
 — Ома в дифференциальной форме **III/ 15, 19, 26, 29, 69, 76**  
 — Ома для участка цепи **III/ 21**  
 — Снеллиуса **V/ 391**  
 — электромагнитной индукции **IV/ 13**  
 Запись комплексная **IV/ 37**  
 Заряд зависимый **II/ 77, IV/ 32, 33, 73**  
 — индуцирующий; индуцированный, собственный **II/ 95**  
 — полный **IV/ 17, 33, 43, 73**  
 — свободный **II/ 87, 94, 99, III/ 65, IV/ 22, 33**  
 — связанный **II/ 73, 75 IV/ 33**  
 — сторонний **IV/ 33, 73**  
 — электрода **III/ 50, 67, IV/ 73, 102**  
 Зоны ближняя, дальняя **IV/ 74, 79, 93, 102, V/ 47**  
 — Френеля **V/ 67**

- Импеданс **IV/ 52, 75, 80, 83, 94**
- Индукция магнитная, электрическая (смещение) **III/ 78**
- электромагнитная **IV/ 10, 13**
  - электростатическая **III/ 96**
- Интеграл Вебера - Липшица **IV/ 89**
- Зоммерфельда **IV/ 89, 99**
  - Фурье **IV/ 45, 55 V/ 42, 44, 54, 63, 89**
- Источник упругих волн сосредоточенный **V/ 56, 62**
- поперечных волн сферический **V/ 48**
  - продольных волн сферический **V/ 40**
- Источники поля **I/ 24, 26, 69, 73, III/ 23, 39, 73,**
- — — — **III/ 12, 18, 26, 33, 63, 65, 67**
- Калибровка потенциала **IV/ 31, 34, 63**
- Квадруполь **III/ 39, 40**
- Константы упругие Ламэ **V/ 31**
- Коэффициент затухания (поглощения) **IV/ 46, 49, 83, V/ 55**
- контрастности границы **II/ 91, III/ 36, 41, 68**
  - Пуассона **V/ 26 - 32, 62**
  - участка цепи тока **III/ 25**
  - фазы **IV/ 46**
- Коэффициенты отражения и прохождения **IV/ 83, 95 V/ 77 - 79, 82, 84**
- Лапласиан вектора **I/ 28**
- скаляра **I/ 26, 61**
- Линия дипольная **III/ 38**
- Масса пробная **III/ 14, 107**
- Массы объёмные и необъёмные **III/ 7, 8, 44**
- временные и постоянные **III/ 78, 83**
  - зависимые и независимые **III/ 77, 86, 102**
  - связанные и свободные **III/ 73, 77, 102**
- Модуль Юнга **V/ 26, 31**
- Момент вращающий **III/ 63, III/ 73, 77**
- дипольный совокупности масс **II/ 33, 39, 53, 69, 72**
  - диполя **II/ 31, 40 III/ 58, 73, IV/ 73, 77**
  - магнитный (магнита, тока) **II/ 71, III/ 73**
- Напряжение векторного поля **I/ 21, 44**
- в цепи тока **III/ 30**
  - стороннего поля **III/ 28, IV/ 14**
- Напряжения упругие **V/ 7 - 11**
- главные **V/ 13**
- Напряжённость поля **I/ 10, 11, III/ 14, 24**
- гравитационного **III/ 14, 16, 65, 106**
  - магнитного **III/ 14, 65, 78, 106**
  - электрического **III/ 14, 65, 78**
- Непрерывность поля и её нарушение **II/ 18, 44, III/ 39, 80**
- Область аперифрактическая, перифрактическая **I/ 70**

- односвязная, многосвязная **I/ 72**
- существенная при распространении упругих волн **V/ 67**
- Однородность среды и её нарушение **II/ 67, 83, 87,**
- — — — **III/ 63, V/ 26, 30, 40, 45, 74**
- Оператор Гамильтона (набла) **I/ 24, 41, II/ 25, 85**
- Даламбера **IV/ 31**
- Лапласа **35 I/ 27, 28, 62, 64, 67, 78, II/ 29, 85, III/ 63**
- Орты **I/ 12**
- Параметры среды **II/ 80,88, III/ 15, 98, IV/ 13, 43, V/ 39, 74 -80**
- Период временной **IV/ 25, 32, 36, 48, 53, V/ 46, 52, 80**
- пространственный **IV/ 25**
- Плотность масс (зарядов) **II/ 7, 9, 17, 24**
- поверхностная дипольных моментов **II/ 34, III/ 31**
- тока проводимости, смещения **III/ 7, IV/ 11, 32, 42**
- полного тока **IV/ 12, 32, 42**
- потока электромагнитной энергии **IV/ 21, 76**
- стороннего тока **IV/ 33**
- Поверхность раздела (граница) **II/ 85, 90, 93, 103, III/ 40,**
- — — — **IV/ 65, 81, 85, 97, V/ 74, 80, 84 - 86**
- особая **II/ 46, 48, 92**
- Поле **I/ 10**
- вектора смещения **V/ 18**
- вихревое **I/ 26, 75**
- вращающееся **IV/ 41**
- гармонически меняющееся **IV/ 36, 40, 42, 44,**
- — — — **V/ 42, 47, 54, 68, 74, 81, 87**
- дивергентное **I/ 72**
- квазипостоянное **IV/ 10, 28, 72**
- квазипотенциальное **I/ 67, III/ 84**
- квазистационарное **IV/ 27, 35, 42, 44, 47, 49, 53, 73, 79, 83, 93, 101**
- ламеллярное **I/ 72, 75**
- первичное и вторичное **III/ 70, 72, 82, 94, III/ 36, 38, 45, 57, 65,**
- — — — — — **IV/ 75, 93**
- потенциальное **I/ 61, 84**
- скалярное и векторное **I/ 10, 31**
- смещений **V/ 35, 37 - 39, 40, 48, 53, 56, 74, 76, 78, 80, 89**
- соленоидальное **I/ 12, 26, 68, 75**
- стороннее **III/ 27, 29, 33, 48, 71, IV/ 19, 33**
- тензорное **I/ 12, III/ 16, 69, V/ 11 - 13, 15, 19 - 25, 28 - 33, 35**
- чисто-вихревое **I/ 26, 75**
- электромагнитное **IV/ 9, 16, 25, 42**
- эффективное электрическое **III/ 76**
- Поляризация диэлектриков и намагничивание магнетиков **II/ 70**
- постоянная, временная **II/ 71**
- эллиптическая, линейная **IV/ 41, 53, 80, V/ , 78, 90**

- Постоянная гравитационная **II**/ 12  
 — магнитная **III**/ 12  
 — фазовая **IV**/ 46, 49, **V**/ 56  
 — электрическая **III**/ 12  
 — электродинамическая **IV**/ 24, 50  
 Потенциал **I**/ 60  
 — векторный **I**/ 65, **III**/ 79, 94, **V**/ 48  
 — логарифмический **II**/ 44  
 — магнитного поля постоянного тока **III**/ 79, 90, 96  
 — многозначный **III**/ 90  
 — скалярный **I**/ 75, 80, **II**/ 24, 53, 71, 85, **III**/ 90, **V**/ 35 - 36, 87  
 — упругий **V**/ 32  
 Потенциалы запаздывающие **IV**/ 31  
 — поля смещений **V**/ 62 - 63, 66 - 70, 87  
 — электродинамические **IV**/ 29, 34, 58, 62, 65, 67, 69, 95  
 Поток вектора (скалярный) **I**/ 20, 43  
 — векторный **I**/ 53  
 — магнитный, смещения **III**/ 84  
 — скаляра **I**/ 52  
 — электричества **III**/ 7  
 — электромагнитной энергии **IV**/ 21  
 Принцип взаимности **III**/ 66  
 — Гюйгенса **V**/ 66 - 68, 80  
 — суперпозиции **II**/ 14  
 Проводимость продольная **III**/ 45  
 Проводник в электростатическом поле **III**/ 93, 98  
 — идеальный **III**/ 16, 22, 25, 42, 44, **IV**/ 20, 33, 83, 94, 95  
 Производные пространственные **I**/ 23, 25, 42, 45, 52, 104  
 — — — вторые **I**/ 27, 60, 65  
 — функции расстояния **I**/ 90  
 Проницаемость относительная, абсолютная **III**/ 79, **III**/ 67  
 — комплексная диэлектрическая **IV**/ 43  
 Работа (напряжение) **I**/ 44, 60  
 — в цепи тока **III**/ 31  
 Регулярность на бесконечности **III**/ 17  
 Ротор **I**/ 25, 33, 43, 45, 53  
 — градиента **I**/ 60  
 — двухмерный **I**/ 54  
 — поверхностный **I**/ 57  
 — ротора **I**/ 66  
 Ряд Фурье **IV**/ 45, 53  
 Сжатие всестороннее **V**/ 31  
 Сила лоренцева **III**/ 76  
 — магнитодвижущая **III**/ 83  
 — электродвижущая **III**/ 28

- Симметрия поля **I/ 96, II/ 11, 41, 52, 98, III/ 84, 101**
- Система координат **I/ 12, 104**
- право- и левовинтовая **I/ 12, 31, 36**
  - декартова, цилиндрическая, сферическая **I/ 12, 104**
- Система уравнений векторного поля **I/ 75, II/ 23, 84, III/ 58, 82, 98**
- гармонически меняющегося электромагнитного поля **IV/ 42**
  - магнитного поля постоянного тока **III/ 82, 97**
  - постоянного электромагнитного поля **IV/ 7**
  - статического поля в вакууме **II/ 23**
  - статического поля в поляризующейся среде **II/84**
  - стационарного электрического поля **III/ 58**
  - электродинамики **IV/ 17, 22, 25, 27, 42**
- Скин-эффект **IV/ 319**
- Скорость распространения волн **IV/ 24, 28, 35, 50,**
- — — — **V/ 34, 41, 45, 49, 53, 61, 76, 79, 83, 87**
  - фазовая **IV/ 48**
- Слой Грина **II/ 109**
- двойной **II/ 34, 37, 56, 63, 81**
  - простой (ординарный) **II/ 9, 46, 48, 56**
  - тонкий **III/ 45, 65**
- Сопротивление волновое **IV/ 52, 75, 80, 83, 94, V/ 77, 88**
- поперечное **III/ 45**
  - удельное электрическое **III/ 15, 26, 35, 44, 50, 58, 70, IV/ 26**
  - участка цепи **III/ 15, 21**
  - (заземления) электрода **III/ 67**
- Среда анизотропная **II/ 68,108, III/ 16, 69**
- изотропная **II/ 68, 81, III/ 16, 41, 94**
  - однородная, кусочно-однородная, градиентная **III/ 67, 71,**
  - — — — — — — — **III/ 37, 102**
- Тензор деформаций **V/ 19**
- напряжений **V/ 11**
  - удельной электропроводности **III/ 16**
- Теорема Гаусса - Остроградского **I/ 49, II/ 22, 43, 73**
- единственности **I/ 80, 86, IV/ 61**
  - Стокса **I/ 45, II/ 21**
- Ток в магнитном поле **III/ 72**
- зависимый **IV/ 32**
  - необъёмный **III/ 12, 72**
  - объёмный **III/ 7, 78**
  - проводимости **IV/ 12, 29, 33, 43**
  - смещения **IV/ 10, 12, 29**
  - сторонний **IV/ 32, 62, 68,74, 80, 89, 91,96, 102**
  - электрический **III/ 7**
- Токи молекулярные **III/ 93, 95**
- Угол видимости **I/ 17, 92**

- критический **V/ 85**
- потерь **IV/ 44**
- телесный **I/ 17**
- Удлинения главные **V/ 23**
- Уравнение векторного потенциала магнитного поля постоянного
  - — — — — — — — — — тока **III/ 81, 96**
  - волновое **IV/ 22, 27, 31, V/ 41, 55, 57, 62 - 68**
  - Гельмгольца **IV/ 42, 77, 86, 88, V/ 42, 64, 74**
  - Даламбера **IV/ 30**
  - калибровочное **IV/ 31, 34, 63**
  - Ламэ **V/ 35**
  - непрерывности **III/ 11, 19, IV/ 18**
  - потенциала статического поля **II/ 29**
  - стационарного электрического поля **III/ 59**
  - Пуассона - Лапласа **I/ 62, II/ 28, 55, 58, 105**
  - равновесия дифференциальное **V/ 9, 15, 17, 34**
  - Робэна **II/ 97**
  - связи **II/ 79, III/ 59, 65, 98, IV/ 9, 18**
  - струны **IV/ 23, 28, 31, V/ 41, 49, 53, 76,**
  - телеграфное (уравнение телеграфистов) **IV/ 25, 34**
  - теплопроводности **IV/ 27, 35**
  - Фредгольма **III/ 37**
- Уравнения векторного поля **I/ 75**
  - интегральные **II/ 97, III/ 37, 56**
  - Максвелла **IV/ 10, 12, 14, 15, 17, 25, 28, 51**
  - потенциалов векторного, поля **I/ 60, 66, 77**
  - электродинамических **IV/ 29, 31, 34, 58, 63 - 67, 85**
- Условия граничные (сопряжения) **I/ 83, 86, II/ 53, 102, III/ 60, 100,**
  - — — — — — — — — — **IV/ 60, 65, 81, 86, 97, V/ 74**
  - единственности решения прямой задачи **I/ 80, 86,**
  - — — — — — — — — — **II/ 52, 102, III/ 59, 100, IV/ 58, 61, V/ 38**
  - квазистационарности **IV/ 29, 44, 83**
  - краевые **I/ 78, 82, II/ 52, 103, III/ 22, 60, 100, IV/ 58,**
  - — — — — — — — — — **V/ 38, 65, 68**
  - начальные **IV/ 58, 60, V/ 35, 38, 41, 48**
  - у особых точек и линий **I/ 82, II/ 53, 81, III/ 66, 100, IV/ 60, 86**
- Участок цепи тока **III/ 21, 25**
  - — автономный **III/ 22**
  - — квазилинейный **III/ 24**
- Фаза **I/ 100, IV/ 36, 41, 74, V/ 42, 47, 86**
  - начальная **I/ 101, IV/ 36, 41, 44**
- Фактор временной **IV/ 38, 45, 72, V/ 42**
- Формула Кирхгофа **V/ 66**
- Формулы Грина **II/ 53**
  - Пуассона **II/ 106, V/ 67**

- Коши **V/ 26**
- Функция возбуждения **I/ 75, IV/ 35**
- гармоническая **II/ 63**
- Грина **II/ 56, 61, 108**
- Дирака (дельта - функция) **II/ 59, 104, IV/ 57**
- точки **I/ 10, 31**
- Функции Бесселя **IV/ 91**
- Цепь тока **III/ 19, 24, 28**
- с электродами **III/ 49**
- Циркуляция **I/ 21, 44**
- Частота колебаний **IV/ 36, 44, 50, 55**
- круговая **IV/ 36, V/ 44**
- Число волновое действительное **IV/ 46, 49, V/ 47, 54, 64**
- комплексное **IV/ 45**
- Экран электростатический **II/ 98**
- Электрод необъёмный **III/ 57**
- питающий (токовый) **III/ 49**
- уединённый **III/ 53**
- эквипотенциальный **III/ 51, 55**
- эквиэмиссионный **III/ 57**
- Электроды взаимно независимые **III/ 53**
- Электропроводность удельная **III/ 15, 26, 35, 44, 50, 58, 70**
- комплексная **IV/ 43**
- Энергия поля электрического, магнитного **II/ 108**
- поля электромагнитного **IV/ 19, 22**
- упругая **V/ 32**

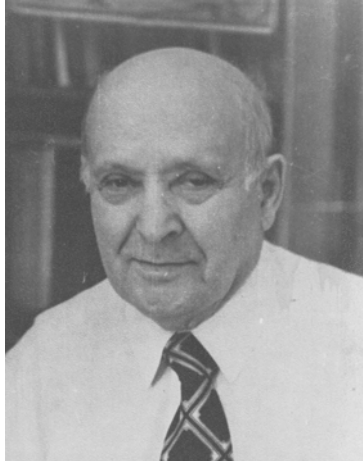


### Список литературы

1. Альпин Л. М. Теория поля. - М.: Недра, 1966.
2. Альпин Л. М. Практические работы по теории поля.- М.: Недра, 1971.
3. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. - М.: Недра, 1985.
4. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть I. Введение. Глава первая "Поле", 2019. - 104 с.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=41710031>;  
[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol1\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf).
5. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть II. Глава вторая "Статическое поле в вакууме". Глава третья "Статическое поле в присутствии среды", 2020. - 111 с.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=42771398>;  
[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol2\\_2019.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf).
6. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть III. Глава четвёртая "Стационарное электрическое поле". Глава пятая "Магнитное поле постоянного тока", 2020. - 106 с.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=42782333>;  
[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol3\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol3_2020.pdf).
7. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике (электронная версия). Часть IV. Глава шестая "Переменное электромагнитное поле". Глава седьмая "Прямая задача теории переменного электромагнитного поля", 2020, 104 с.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=43803479>;  
[http://magnetometry.ru/files/Alpin\\_uch\\_vol4\\_2020.pdf](http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol4_2020.pdf).
8. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров.- М.: Наука, 1964.
9. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.- М.: Наука, 1973.
10. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке.- Л.: Недра, 1972.
11. Гурвич И. И. Сейсмическая разведка.- М., Недра, 1970.
12. Гурвич И. И., Боганик Г. Н. Сейсмическая разведка.- М.: Недра, 1980.
13. Дашевский Ю. А. Применение преобразования Эйлера для расчёта стационарных и гармонических электромагнитных полей в горизонтально-слоистых средах. В кн Электромагнитные методы геофизических исследований. ИГ и Г СО АН СССР. Новосибирск, 1982.
14. Джексон Дж. Классическая электродинамика.- М.: Мир, 1965.
15. Заборовский А. И. Переменные электромагнитные поля в электроразведке. - М.: Изд-во МГУ, 1960.
16. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. - М.: Гостехиздат, 1949.



17. *Каринский А. Д.* Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебное пособие (Лекции), 2014, 203 с. [Электронный ресурс/Текст]:  
[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=2656](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2656);  
[http://magnetometry.ru/files/Karinskiy\\_lec\\_2014.pdf](http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lec_2014.pdf);  
<http://www.geokniga.org/books/6822>.
18. *Каринский А. Д.* "Теория поля". Дополнительные главы: учебное пособие для специализации "сейсморазведка" [Электронный ресурс/Текст]:  
[http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT\\_ID=4823](http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=4823);  
[http://magnetometry.ru/files/Karinskiy\\_uch\\_2018.pdf](http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_uch_2018.pdf).
19. *Кауфман А. А., Левшин А. Л.* Введение в теорию геофизических методов. Часть 3. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. - М.: Недра, 2001, 520 с.
20. *Кауфман А. А., Левшин А. Л., Ларнер К. Л.* Введение в теорию геофизических методов. Часть 4. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. - М.: Недра, 2003, 662 с.
21. *Кауфман А. А., Левшин А. Л.* Введение в теорию геофизических методов. Часть 5. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. - М.: Недра, 2006, 664 с.
22. *Корн Г. и Корн Е.* Справочник по математике /изд. 2-е. - М.: Наука, 1970.
23. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. - М.: Наука, 1965.
24. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. - М.: Радио и связь, 1983.
25. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. - М.: Изд-во Иностранная литература, 1958.
26. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. - М.: Наука, 1973.
27. *Овчинников И. К.* Теория поля. - М.: Недра, 1979.
28. *Рябинкин Л. А.* Теория упругих волн. М., Недра, 1986.
29. *Саваренский Е. Ф.* Сейсмические волны. - М.: Недра, 1972.
30. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под редакцией М. Абрамовиц и И. Стиган. Москва, "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
31. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. - М.: Гостехиздат, 1946.
32. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. - М.: Гостехиздат, 1948.
33. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. - М.: Наука, 1976.
34. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977.

## Сведения об авторах

		
<p style="text-align: center;"><b>Лев Моисеевич Альпин (1898 – 1986)</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>Дмитрий Сергеевич Даев (1927 – 2021)</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>Александр Дмитриевич Каринский</b></p>
<p>Родился в городе Кременчуге.</p> <p>В 1930-ом году, окончил физико-математическое отделение МГУ. Доктор технических наук. В 1933-ом году начал заниматься преподавательской деятельностью во МГРИ, где прошёл путь от ассистента кафедры геофизики до профессора, заведующего кафедрой.</p> <p>Педагогическую деятельность сочетал с исследовательской работой во ВНИИГеофизике и других геофизических организациях. Под его влиянием сформировались, как специалисты, многие известные выпускники геофизического факультета МГРИ 30-х – 70-х годов.</p>	<p>Родился в городе Новосибирске.</p> <p>В 1952-ом году окончил геофизический факультет МГРИ. Доктор технических наук. Заслуженный деятель науки и техники РФ. В 1952-1958 гг. работал во МГРИ инженером, ассистентом. С 1958-го по 1964-й год – зав. лабораторией электромагнитных полей института геологии и геофизики СО АН СССР. С 1965-го года – доцент, затем профессор МГРИ. С 1978-го года – зав. кафедрой электрических, гравитационных и магнитных методов геофизики МГРИ, а с 2003-го года по 2018-й год – профессор этой кафедры, затем – кафедры геофизики. В 1976-1977 гг. – эксперт ООН в Индии. В 1981-1983 гг. – эксперт ООН в странах Восточной Африки.</p>	<p>Родился в 1949-ом году в городе Москве.</p> <p>В 1971-ом году окончил геофизический факультет МГРИ. Доктор физико-математических наук. С 1971-го по 1999-й год работал во МГРИ в должностях младшего научного сотрудника, ассистента, старшего преподавателя, доцента, профессора. С 1999-го по 2002-й год работал научным сотрудником в Мексиканском институте нефти (ИМР). С 2003-го по 2009-й год – зав. кафедрой электрических, гравитационных и магнитных методов геофизики МГРИ. В настоящее время – профессор кафедры геофизики, но теперь уже, к <i>прискорбию</i>, не геофизического факультета МГРИ.</p>